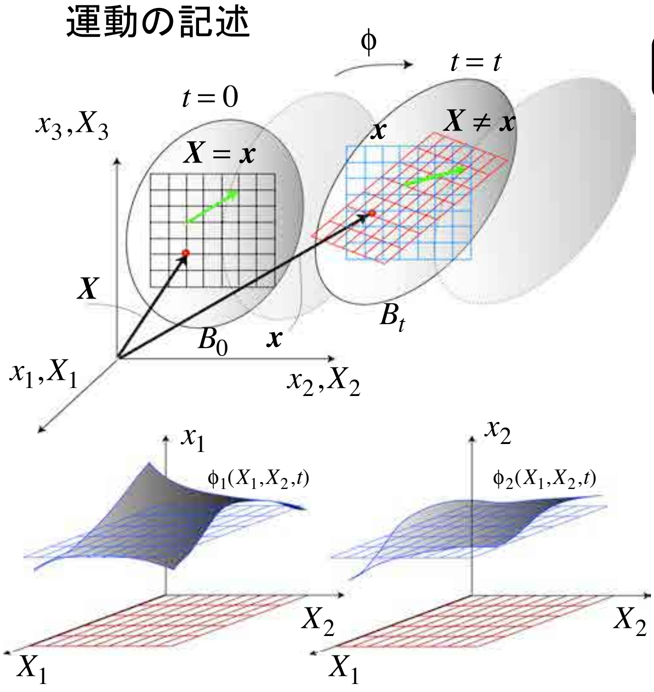
微小変形理論

運動の記述



連続体の運動の記述

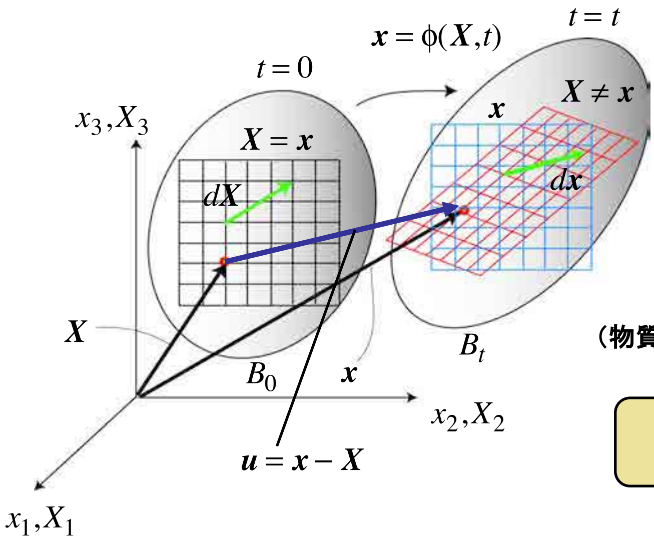
- **物質点に識別ラベル**
  $t=0$ の基準配置 B_0
  初期の位置 $\boldsymbol{X}$をラベル
- **運動が生じれば** $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{x}$
  $\boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{x}$ **の対応関係**

$$\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(\boldsymbol{X},t) \\ \phi_2(\boldsymbol{X},t) \\ \phi_3(\boldsymbol{X},t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1(\boldsymbol{X},t) \\ x_2(\boldsymbol{X},t) \\ x_3(\boldsymbol{X},t) \end{Bmatrix}$$

力学の世界での
運動(motion)の表現

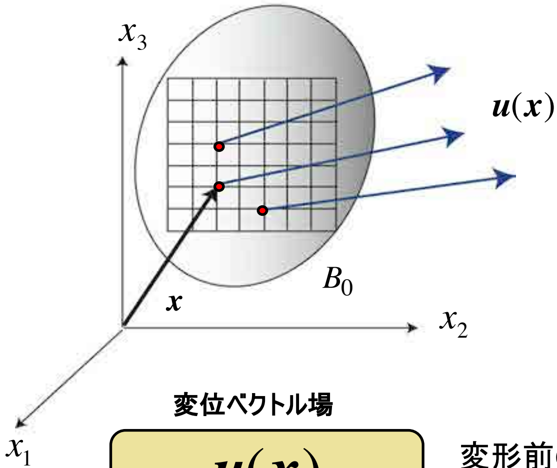
変位ベクトル



（物質点の）変位ベクトル

$$\boxed{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}}$$

微小変位理論



＊変位ベクトルを考える
定義域は B_0 のまま.
→ 変形後の形は
考えない.

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$$

として関数を扱う.

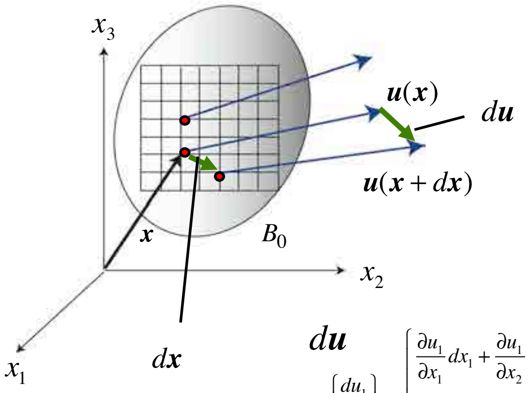
変形を考えないという
意味ではない

変位ベクトル場

$$\boxed{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$$

変形前の B_0 を定義域
とするベクトル値関数

変位勾配テンソル



$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ の違いが変形を生む！

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\begin{Bmatrix} u_1(\boldsymbol{x}) \\ u_2(\boldsymbol{x}) \\ u_3(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_1(x_1,x_2,x_3) \\ u_2(x_1,x_2,x_3) \\ u_3(x_1,x_2,x_3) \end{Bmatrix}$$

全微分　$d\boldsymbol{u}=\nabla\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{x}$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{Bmatrix}}_{d\boldsymbol{u}}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}dx_3 \end{Bmatrix}=\boxed{\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}}^{\nabla\boldsymbol{u}}}\underbrace{\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix}}_{d\boldsymbol{x}}$$

点 $\boldsymbol{x}$ 付近の変形の様子を表す指標になる！　　変位勾配テンソル

正方行列の加算分解

任意の正方行列は対称行列と反対称行列の和に一意に分解できる.

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T\right)=\boldsymbol{A}_s+\boldsymbol{A}_a$$

対称行列

$$\boldsymbol{A}_s^T=\boldsymbol{A}_s$$

反対称行列

$$\boldsymbol{A}_a^T=-\boldsymbol{A}_a$$

（例）

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},\quad \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\right)=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix},\quad \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T\right)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

対称行列 B と任意の行列 A の内積には対称部分だけが寄与

$$\boldsymbol{B}:\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}:(\boldsymbol{A}_s+\boldsymbol{A}_a)=\boldsymbol{B}:\boldsymbol{A}_s$$
$$(\because\quad \boldsymbol{B}:\boldsymbol{A}_a=0\quad)$$

Cauchy応力と変位勾配テンソルの内積

Cauchy応力テンソルは対称

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{bmatrix}$$

（仕事）＝（力の変数）×（運動の変数）

$$W=\boldsymbol{\sigma}:\nabla\boldsymbol{u}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^T\nabla\boldsymbol{u})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\nabla\boldsymbol{u})=\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\qquad \because\ \sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=0$$

対称なテンソルとの内積は対称部分だけが寄与する！

微小ひずみテンソルと微小回転テンソル

変位勾配テンソル

$$\nabla \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{対称部分}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{反対称部分}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

微小ひずみテンソル

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

微小回転テンソル

Cauchy応力と勾配テンソルの内積はお決まりの式展開

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla \boldsymbol{w})_s + (\nabla \boldsymbol{w})_a] = \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \boldsymbol{w})_s$$

変位勾配テンソルとの内積

$$(\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}) \quad \sigma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

（微少ひずみテンソルとの内積）

速度勾配テンソル

$$(\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}) \quad \sigma_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \sigma_{ij}\, l_{ij} = \sigma_{ij}\, d_{ij} \quad (\because \ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{l}_s)$$

（変形速度テンソルとの内積）

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \qquad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

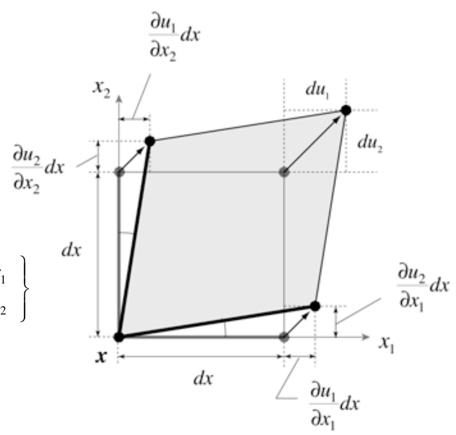
$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

変位ベクトル場の全微分の幾何学的意味

変位ベクトル場の全微分

$$\boldsymbol{du} = \nabla \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{dx}$$



$$\begin{Bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & \omega_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix}$$

微小ひずみテンソルの幾何学的意味