# 内積とドット積の話

# 内積

・線形空間（集合）に付随する数学の重要概念

・集合内の二つの要素を実数に対応させる演算 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in R$ であり,
以下の内積の公準を満たすもの.

線形性： $\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \rangle, \quad \langle \lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$

可換性： $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$

正値性： $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0, \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

⇒ 長さ・距離 $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}, \quad \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \rangle}$

（シュワルツの不等式） $0 \leq \|\lambda \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \langle \lambda \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \lambda \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle = \lambda^2 \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + 2\lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle, \ \forall \lambda$

$$\therefore \ \frac{D}{4} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 \leq 0$$

⇒ 角度 $-1 \leq \cos\theta = \dfrac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\|} \leq 1$ ⇒ 直交 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$

・線形空間に幾何学的構造を与えるモノサシ（Euclid空間, Hilbert空間）

・内積演算の表記の仕方は色々ある・・・

$$\underbrace{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b},}_{\text{ベクトル}} \qquad \underbrace{\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle, \quad \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}_{\text{2階テンソル}}$$

# ドット積

・ベクトル（1階テンソル）の内積において行われる演算操作の名称.

・名前のとおり（・）で表す.

・したがって，ベクトル同士の場合はドット積（操作）は内積と同義.

$$\forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in R$$

・2階テンソルによるベクトルの線形変換はドット積の一種.

$$\boldsymbol{Ax} = \left[A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\right](x_k \boldsymbol{e}_k) = A_{ij} x_k (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \boldsymbol{e}_k$$

$$= A_{ij} x_k \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) = A_{ij} x_k \delta_{jk} \boldsymbol{e}_i = A_{ij} x_j \boldsymbol{e}_i$$

基底ベクトル同士のドット積（内積）が行われるから・・・

しかし，演算の表記においてドット（・）は書かない！

・高階テンソルによるベクトルの線形変換もドット積という（同じ理由）.

$$\boldsymbol{\Psi x} = \left[\Psi_{ij\cdots pq}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q)\right](x_r \boldsymbol{e}_r) = \Psi_{ij\cdots pq} x_r (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q) \boldsymbol{e}_r$$

$$= \Psi_{ij\cdots pq} x_r (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_p)(\boldsymbol{e}_q \cdot \boldsymbol{e}_r) = \Psi_{ij\cdots pq} x_r \delta_{qr} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_p)$$

$$= \Psi_{ij\cdots pq} x_q (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_p)$$

# 変形勾配テンソルの話し

$$\boldsymbol{F} = F_{iJ}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)$$

・Two-Point テンソル

・ヤコビアン

・Pull Back と Push Forward

# 物質座標と空間座標

物質座標：初期配置に設定．物質点に貼り付けた座標（軸）．

$$\boldsymbol{X} = X_I \boldsymbol{E}_I$$

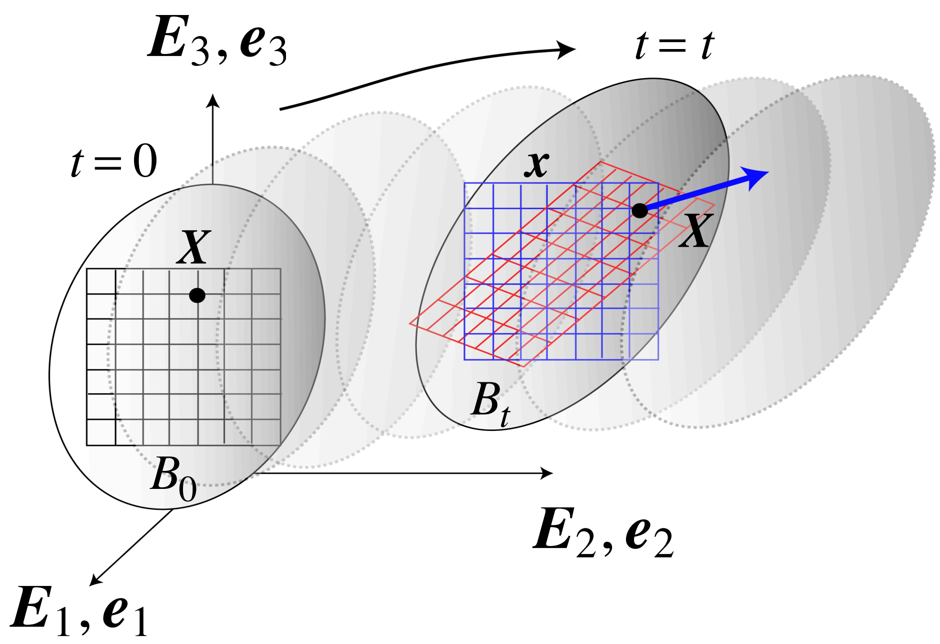
空間座標：空間に固定した座標（軸）．

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$$

座標軸は任意に設定.

同じでもよい.

ただし，基底は区別.



# 変形勾配テンソルの基底付き表現

$$\boldsymbol{F} = F_{iJ}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J\right) = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J\right) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_i\boldsymbol{e}_i &= F_{iK}\mathrm{d}X_K\boldsymbol{e}_i \\
&= F_{iJ}\delta_{JK}\mathrm{d}X_K\boldsymbol{e}_i \\
&= F_{iJ}\mathrm{d}X_K\left(\boldsymbol{E}_J \cdot \boldsymbol{E}_K\right)\boldsymbol{e}_i \\
&= F_{iJ}\mathrm{d}X_K\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J\right)\boldsymbol{E}_K \\
&= \underbrace{\left(F_{iJ}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J\right)\right)}_{\boldsymbol{F}}\underbrace{\left(\mathrm{d}X_K\boldsymbol{E}_K\right)}_{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial(x_i\boldsymbol{e}_i)}{\partial(X_J\boldsymbol{E}_J)} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{x} \otimes \nabla_X = (x_i\boldsymbol{e}_i) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial X_J}\boldsymbol{E}_J\right) \\
&= \frac{\partial x_i}{\partial X_J}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J\right)
\end{aligned}$$

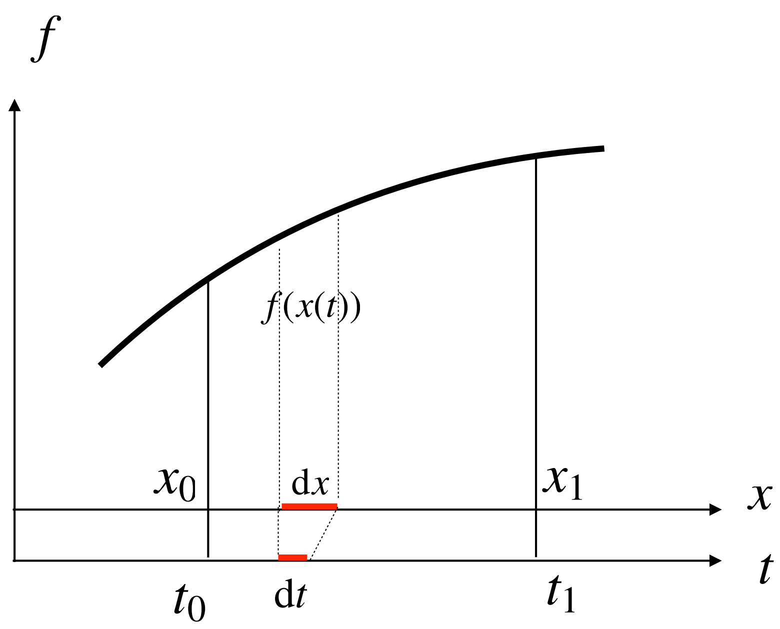
$\boldsymbol{F}$ は $[\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3]$ を基底とする量を $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ を基底とする量に変換する

$\boldsymbol{F}$ は物質座標を参照する量を，空間座標を参照する量に変換する

2つの空間を橋渡しする２階テンソル　→　Two-Point テンソル

# ヤコビアン（Jacobian）

ヤコビアンとは関数行列式のこと．定積分の変数変換に出てくる．




積分測度（measure）

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

積分測度の大きさの調整係数

$$x = x(t)\,,\qquad \mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

$$x_0 \le x \le x_1$$

$$t_0 \le t \le t_1$$

## 多変数関数の場合

$$\int_{B_t} f(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}v = \iiint_{B_t} f(x_1, x_2, x_3)\ \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

$$= \iiint_{B_0} \hat{f}(X_1, X_2, X_3)\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)}\ \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2\mathrm{d}X_3$$

$$= \int_{B_0} \hat{f}(\boldsymbol{X})J\ \mathrm{d}V$$

積分測度の大きさの調整係数

=> 関数行列式・ヤコビアン（Jacobian）

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \det \boldsymbol{F}$$

だから，$J = \det \boldsymbol{F}$ をヤコビアンと呼ぶ．

## $\boldsymbol{F}$ の物質時間微分 $\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{D}t} = \dot{\boldsymbol{F}}$

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{F}} = \dot{F}_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J}\right)(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) = \frac{\partial}{\partial X_J}\left(\frac{\mathrm{D}x_i}{\mathrm{D}t}\right)(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) \\
&= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) = \frac{\partial v_i}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) \\
&= \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\delta_{kl}\frac{\partial x_l}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) \\
&= \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{E}_J) \\
&= \left[\underline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k)}\right]\left[\frac{\partial x_l}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{E}_J)\right] \\
&= \boldsymbol{l}\boldsymbol{F}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{l} = \nabla \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k)
$$

（速度勾配テンソル）

## よく使う関係式： $\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{l}\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{l} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1} &= \left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_J}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)\right]\left[\frac{\partial X_K}{\partial x_l}(\boldsymbol{E}_K \otimes \boldsymbol{e}_l)\right] = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_J}\frac{\partial X_K}{\partial x_l}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)(\boldsymbol{E}_K \otimes \boldsymbol{e}_l) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_J}\frac{\partial X_K}{\partial x_l}(\boldsymbol{E}_J \cdot \boldsymbol{E}_K)(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) \\
&= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_J}\frac{\partial X_K}{\partial x_l}\delta_{JK}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_l}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) = \frac{\partial v_i}{\partial x_l}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l) = \boldsymbol{l}
\end{aligned}
$$

# $J = \det \boldsymbol{F}$ の物質時間微分

## スカラー三重積を利用

$$\det \boldsymbol{F}\,|\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_3| = |\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_3|$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{D}(\det \boldsymbol{F})}{\mathrm{D}t}\,|\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_3| \\
&\quad = \left|\dot{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_3\right| + \left|\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \dot{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_3\right| + \left|\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \dot{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_3\right| \\
&\quad = \left|\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_3\right| + \left|\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_3\right| + \left|\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_3\right| \\
&\quad = \mathrm{tr}\left(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\right)|\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}_3| \\
&\quad = \mathrm{tr}\left(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\right)(\det \boldsymbol{F})\,|\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_3|
\end{aligned}$$

スカラー三重積に
積の微分を適用

スカラー三重積についての公式

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}|$$

$$\begin{aligned}
\dot{J} = \frac{\mathrm{D}(\det \boldsymbol{F})}{\mathrm{D}t} &= \mathrm{tr}\left(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\right)(\det \boldsymbol{F}) = (\det \boldsymbol{F})\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{l}) \\
&= J\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) = J\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

# $\boldsymbol{F} = F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)$ の転置テンソルと逆テンソル

## 転置テンソル

$$
\begin{aligned}
F_{iJ} &= \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{F}\boldsymbol{E}_J \quad \text{：テンソルの成分抽出} \\
&= \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{E}_J = \boldsymbol{E}_J \cdot \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{e}_i \quad \text{：転置テンソルの定義} \\
&= F^T_{Ji}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \boldsymbol{F}^T = F^T_{Ji}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_i) = F_{iJ}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_i)
$$

## 逆テンソル

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}\mathrm{d}\boldsymbol{X} \quad \rightarrow \quad F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}\,, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \rightarrow \quad F^{-1}_{Ij} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X_I\boldsymbol{E}_I &= F^{-1}_{Ik}\mathrm{d}x_k\boldsymbol{E}_I \\
&= F^{-1}_{Ij}\delta_{jk}\mathrm{d}x_k\boldsymbol{E}_I = F^{-1}_{Ij}\mathrm{d}x_k(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{E}_I \\
&= F^{-1}_{Ij}\mathrm{d}x_k(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k \\
&= \left[F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_j)\right](\mathrm{d}x_k\boldsymbol{e}_k)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \boldsymbol{F}^{-1} = F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_j)
$$

# プッシュフォワード(push forward)とプルバック(pull back)

$B_0$

$$[\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3]$$
$$\boldsymbol{Y} = Y_I \boldsymbol{E}_I$$
$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi_{IJ}(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_J)$$

$\mathcal{F}$ (push forward)

$\mathcal{F}^{-1}$ (pull back)

$B_t$

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$$
$$\boldsymbol{y} = y_i \boldsymbol{e}_i$$
$$\boldsymbol{\phi} = \phi_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$$

$$\boldsymbol{F} = F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)$$
$$\boldsymbol{F}^T = F_{iJ}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_i)$$
$$\boldsymbol{F}^{-1} = F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_j)$$
$$\boldsymbol{F}^{-T} = F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{E}_I)$$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{Y} = [F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)](Y_K \boldsymbol{E}_K) = (F_{iJ} Y_J)\boldsymbol{e}_i$$
$$\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{y} = \left[F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_j)\right](y_k \boldsymbol{e}_k) = \left(F^{-1}_{Ij} y_j\right)\boldsymbol{E}_I$$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{Y} = \left[F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{E}_I)\right](Y_K \boldsymbol{E}_K) = \left(F^{-1}_{Ij} Y_I\right)\boldsymbol{e}_j$$
$$\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{y} = \left[F^{T}_{iJ}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_i)\right](y_k \boldsymbol{e}_k) = \left(F^{T}_{iJ} y_i\right)\boldsymbol{E}_J$$

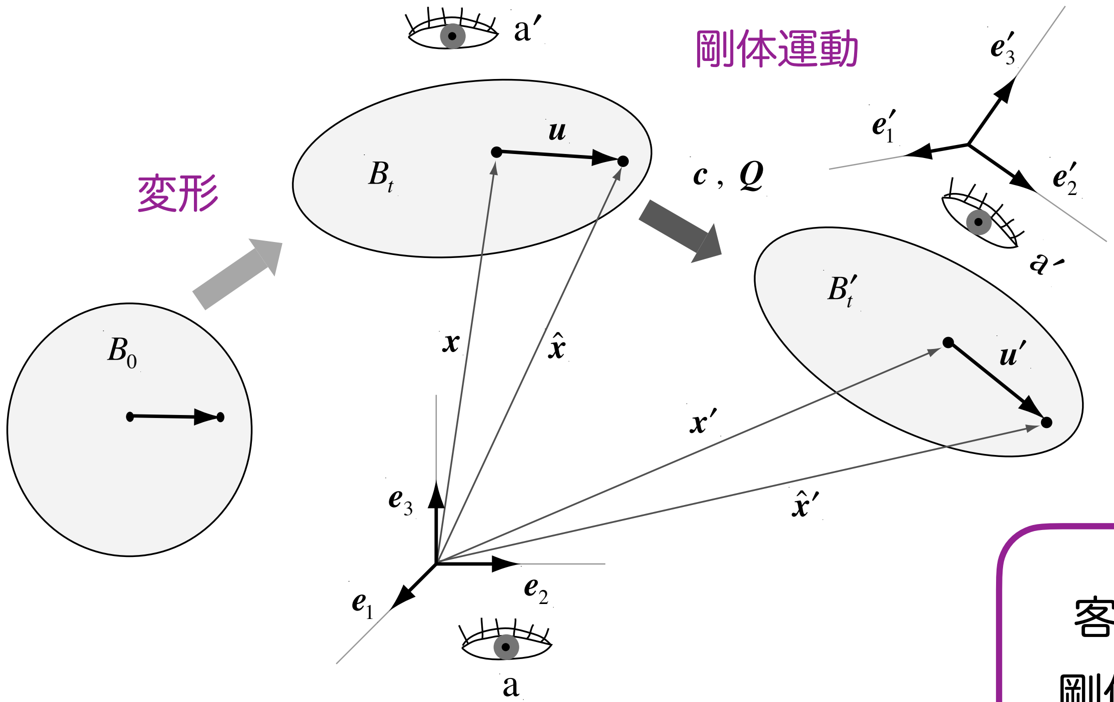
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{F}^T &= [F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)][\Phi_{KL}(\boldsymbol{E}_K \otimes \boldsymbol{E}_L)][F_{mN}(\boldsymbol{E}_N \otimes \boldsymbol{e}_m)] \\ &= (F_{iJ}\Phi_{KL}F_{mN}\delta_{JK}\delta_{LN})(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_m) = (F_{iJ}\Phi_{JL}F_{mL})(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_m)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{F}^{-T} &= \left[F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_j)\right][\phi_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)]\left[F^{-1}_{Mn}(\boldsymbol{e}_n \otimes \boldsymbol{E}_M)\right] \\ &= \left(F^{-1}_{Ij}\phi_{kl}F^{-1}_{Mn}\delta_{jk}\delta_{ln}\right)(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_M) = \left(F^{-1}_{Ij}\phi_{jl}F^{-1}_{Ml}\right)(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_M)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{F}^{-1} &= \left[F^{-1}_{Ij}(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{E}_I)\right][\Phi_{KL}(\boldsymbol{E}_K \otimes \boldsymbol{E}_L)]\left[F^{-1}_{Mn}(\boldsymbol{E}_M \otimes \boldsymbol{e}_n)\right] \\ &= \left(F^{-1}_{Ij}\Phi_{KL}F^{-1}_{Mn}\delta_{IK}\delta_{LM}\right)(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_n) = \left(F^{-1}_{Ij}\Phi_{IL}F^{-1}_{Ln}\right)(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_n)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{F} &= [F_{iJ}(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{e}_i)][\phi_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)][F_{mN}(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{E}_N)] \\ &= (F_{iJ}\phi_{kl}F_{mN}\delta_{ik}\delta_{lm})(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_n) = (F_{iJ}\phi_{il}F_{ln})(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{E}_N)\end{aligned}$$

# 量の客観性の判定の話

# 客観性のある量ならば・・・

$B_t' \ : \ [\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'] = [\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_3]$



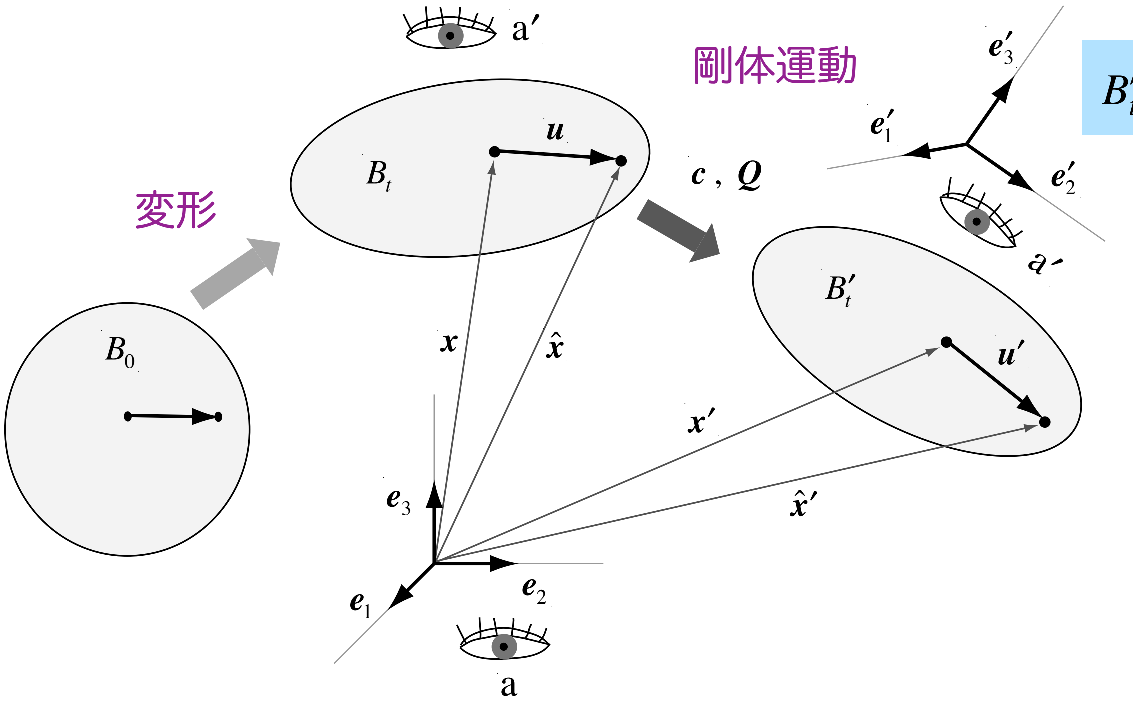

$B_t \ : \ [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$

物体 (変形) に固有の客観性のある量ならば剛体運動によって変わらないはず.

客観性がある量は，物体と一緒に剛体運動する a’ から見て変化しない

a が $B_t$ で観測した客観性のある量は

a’ が $B_t'$ で観測した量に一致.




$$B'_t \ : \ [\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3] = [\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_3]$$

剛体運動 $$\boldsymbol{x}' = \underbrace{\boldsymbol{c}(t)}_{\text{並進}} + \underbrace{\boldsymbol{Q}(t)}_{\text{回転}}\boldsymbol{x}$$

$$B_t \ : \ [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}' &= \hat{\boldsymbol{x}}' - \boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}}) - (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{Q}(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u} \\ &= (\hat{x}_i - x_i)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i \\ &= (\hat{x}_i - x_i)\boldsymbol{e}'_i \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} = (\hat{x}_i - x_i)\boldsymbol{e}_i$$

$B'_t$ において a’ が観測

$$\therefore \ \boldsymbol{u}' \ \rightarrow \begin{Bmatrix} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \\ \hat{x}_3 - x_3 \end{Bmatrix}$$

$B_t$ において a が観測

$$\therefore \ \boldsymbol{u} \ \rightarrow \begin{Bmatrix} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \\ \hat{x}_3 - x_3 \end{Bmatrix}$$

a から見て $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}$ と見えたら客観性あり

$$B_t \ : \ [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$$

$$B_t' \ : \ [\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'] = [\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_3]$$

$$\boldsymbol{h} = h_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$$

$$\boldsymbol{h} \ \rightarrow \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{h}' \ \rightarrow \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}' &= h_{ij}(\boldsymbol{e}_i' \otimes \boldsymbol{e}_j') = h_{ij}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_j) \\ &= \boldsymbol{Q}\left[h_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\right]\boldsymbol{Q}^T \\ &= \underline{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{h}\boldsymbol{Q}^T} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F} = F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}' &= F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i' \otimes \boldsymbol{E}_J) = F_{iJ}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J) \\ &= \boldsymbol{Q}\left[F_{iJ}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_j)\right] = \underline{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = [F_{kI}(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_k)]\,[F_{lJ}(\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{E}_J)] \\ &= F_{kI}F_{kJ}\underline{(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_J)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}' &= \boldsymbol{F}'^T\boldsymbol{F}' = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \\ &= \boldsymbol{C} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S} = JF^{-1}_{Ik}\sigma_{kl}F^{-T}_{kJ}\underline{(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_J)}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}' &= J\boldsymbol{F}'^{-1}\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{F}'^{-T} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})^{-1}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{Q}^T)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F} \\ &= \boldsymbol{S} \end{aligned}$$

観測者不変量