連続体力学で使う微分演算

- 微分可能性と全微分
- 合成関数の微分法
- 勾配ベクトル
- 方向微分，変分，ガトー微分

微分可能性

定義その１：次の極限が存在するとき微分可能（高校教科書）

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} & : \text{Leibniz} \quad \text{（独）} \\ f' & : \text{Lagrange} \quad \text{（仏）} \\ \dot{f} & : \text{Newton} \quad \text{（英）} \\ D_x f & : \text{Cauchy} \quad \text{（仏）} \end{cases}$$

定義その２：以下が成り立つならば微分可能（高木：解析概論）

Δf , Δx について：

$$\Delta f = A\ \Delta x + \epsilon\ \Delta x$$

$$\begin{cases} A = A(x) \\ \underline{\epsilon = \epsilon(x, \Delta x) \to 0 \quad \text{as} \quad \Delta x \to 0} \end{cases}$$

何故なら，以下のとおり，「定義その１」の極限が存在することになるから

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \epsilon) = A = f'(x)$$

全微分（or 単に微分）

微分可能なときは： $\Delta f = f'(x)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x\,,\quad \epsilon \to 0\ \ \text{as}\ \ \Delta x \to 0$

$$\Delta f = f'(x)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x$$

・ $\Delta x \to 0$ と共に $\Delta f \to 0$ となる際,
Δx に比例して（同じ速さで）ゼロに近づく.

$\Rightarrow$ Δf の主要部. $\mathrm{d}f$ と表す.

$$\therefore\quad \mathrm{d}f = f'(x)\,\Delta x$$ ： f の全微分（or 微分）

$f = x$ $\Rightarrow$ $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x = f'(x)\,\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$

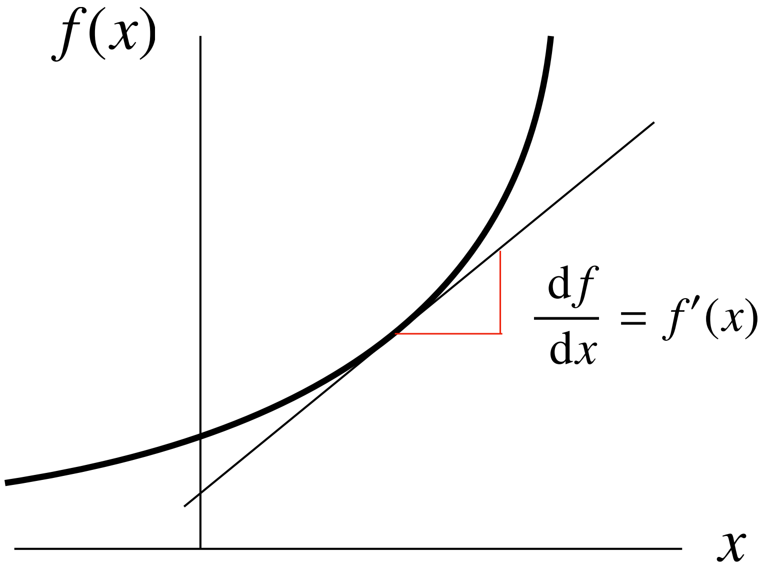
Δx はそれ自体が主要部 $\mathrm{d}x$

全微分（微分）の関係・微分商・接線

微分可能ならば・・・

$\therefore \quad \mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$　：全微分（微分）の関係

（微分商）　$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x)$



分母 $\mathrm{d}x$ と分子 $\mathrm{d}f$ は全微分.

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ は記号ではなく割り算！

・・・全微分の関係（微分商）を決める接線が存在するということ.

合成関数の微分法（１次元）

$$F(t) = f(x(t)) \quad \Rightarrow \quad F'(t) = f'(x) \cdot x'(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

微分可能性の（定義その２）による証明

$$\begin{aligned} \Delta F = \Delta f &= f'(x)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x \\ \Delta x &= x'(t)\Delta t + \epsilon_2 \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F = \Delta f &= f'(x)\left[\, x'(t)\Delta t + \epsilon_2 \Delta t \,\right] + \epsilon_1 \left[\, x'(t)\Delta t + \epsilon_2 \Delta t \,\right] \\ &= f'(x)x'(t)\Delta t + \varepsilon \Delta t \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta F}{\Delta t} = f'(x)x'(t) + \varepsilon \quad \rightarrow \quad F'(t) = f'(x) \cdot x'(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

多変数関数　$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$ の全微分

○ 偏微分：１変数に対する変化率の極限が存在すること

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

○ 微分可能性：　以下が成り立つならば微分可能

$$\Delta \boldsymbol{x} = \{\Delta x_1 \ \ \Delta x_2\}^T$$

$$\Delta f = f(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)$$

$$\Delta f = A\ \Delta x_1 + B\ \Delta x_2 + \epsilon\ \|\Delta \boldsymbol{x}\|$$

$$\begin{cases} A = A(\boldsymbol{x})\ , \quad B = B(\boldsymbol{x}) \\ \underline{\epsilon = \epsilon(\boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{as} \quad \|\Delta \boldsymbol{x}\| \to 0} \end{cases}$$

微分可能性と偏微分：

$\Delta f = A\ \Delta x_1 + B\ \Delta x_2 + \epsilon\ \|\Delta \boldsymbol{x}\|$ において,

・ $\Delta \boldsymbol{x} = \{\Delta x_1 \quad 0\}^T$ とすれば $\Rightarrow$ $\displaystyle \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = A = \frac{\partial f}{\partial x_1}$

・ $\Delta \boldsymbol{x} = \{0 \quad \Delta x_2\}^T$ とすれば $\Rightarrow$ $\displaystyle \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_2} = B = \frac{\partial f}{\partial x_2}$

したがって，微分可能ならば：

$$\therefore\ \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \epsilon\ \|\Delta \boldsymbol{x}\|$$

$$(\epsilon \to 0 \quad \text{as} \quad \|\Delta \boldsymbol{x}\| \to 0)$$

全微分（微分）の関係

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2}_{} + \epsilon\,\|\Delta \boldsymbol{x}\|$$

$\|\Delta \boldsymbol{x}\| \to 0$ と共に　$\Delta f \to 0$ となるとき,

$\|\Delta \boldsymbol{x}\|$ に比例して（同じ速さで）ゼロに近づく.

$\Rightarrow$ 　Δf の主要部！

$$\boxed{\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2}$$

- $f = x_1$, $f = x_2$ とすれば Δx_1 , Δx_2 が主要部 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$

$$\therefore\quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

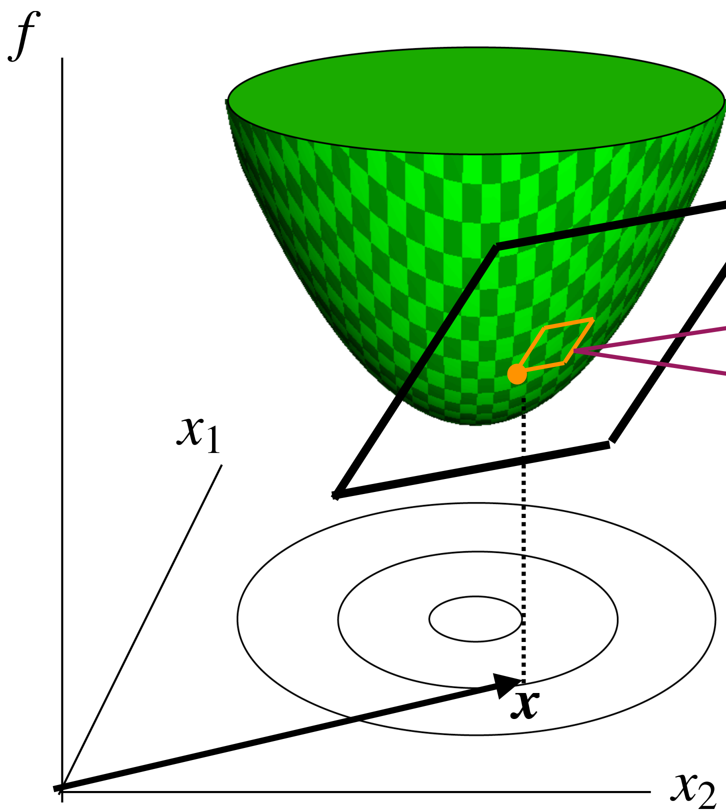
（全微分の関係）

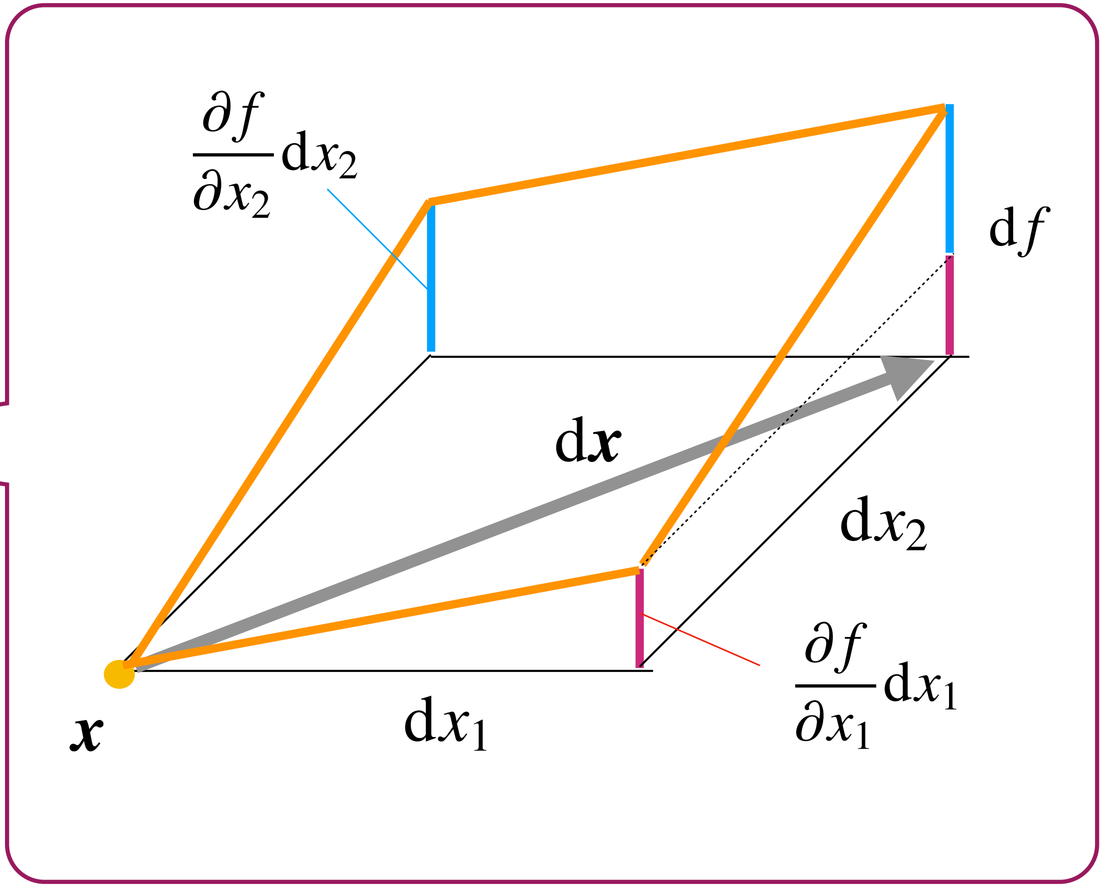
全微分の関係・接平面

微分可能なとき・・・・

$$\therefore \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

$\mathrm{d}f$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ の全微分の関係を決める接平面が存在.





全微分と勾配ベクトル（gradient vector）

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \end{Bmatrix} \qquad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{Bmatrix}$$

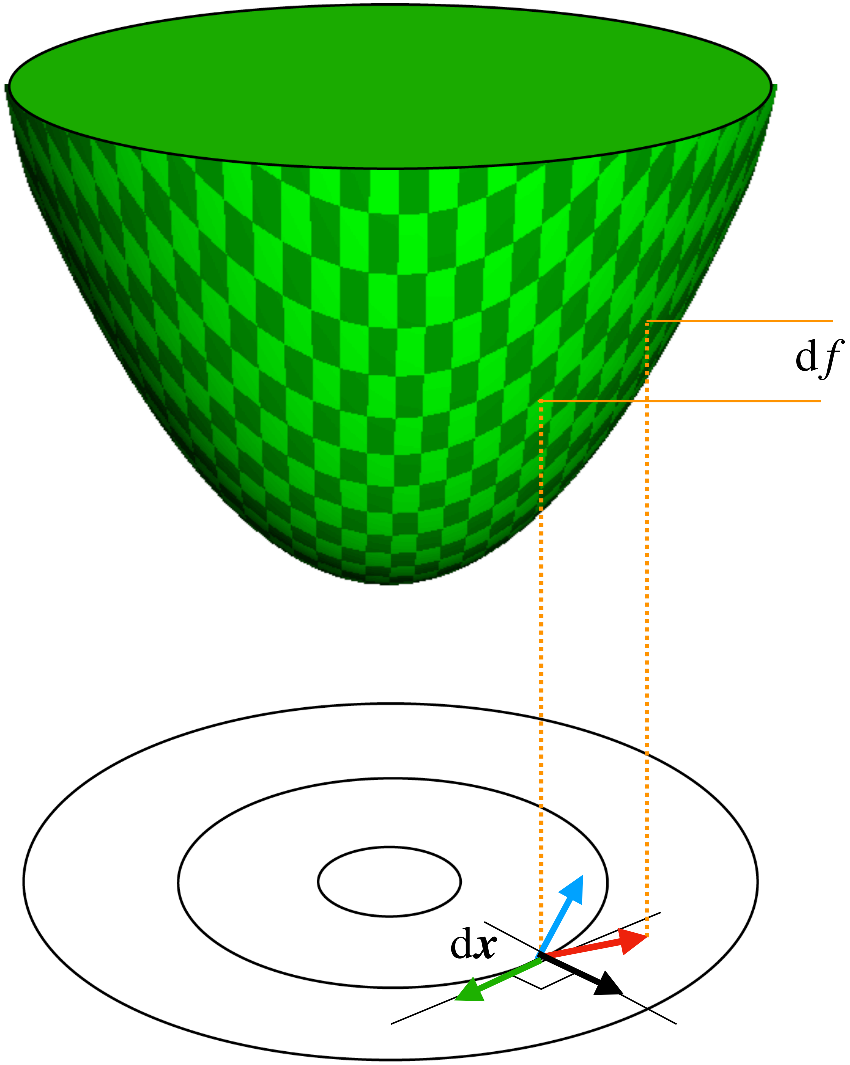
$$\therefore \quad \mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$$ ：勾配ベクトル

関数値の全微分 $\mathrm{d}f$ は $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ と ∇f の内積で与えられる

等高線に垂直で関数値が増える方向を指すベクトル

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \color{deepskyblue}{\longrightarrow} & \mathrm{d}f < 0 \\ \color{green}{\longrightarrow} & \mathrm{d}f = 0 \\ \color{red}{\longrightarrow} & \mathrm{d}f > 0 \end{cases}$$



接平面の方程式と勾配ベクトル

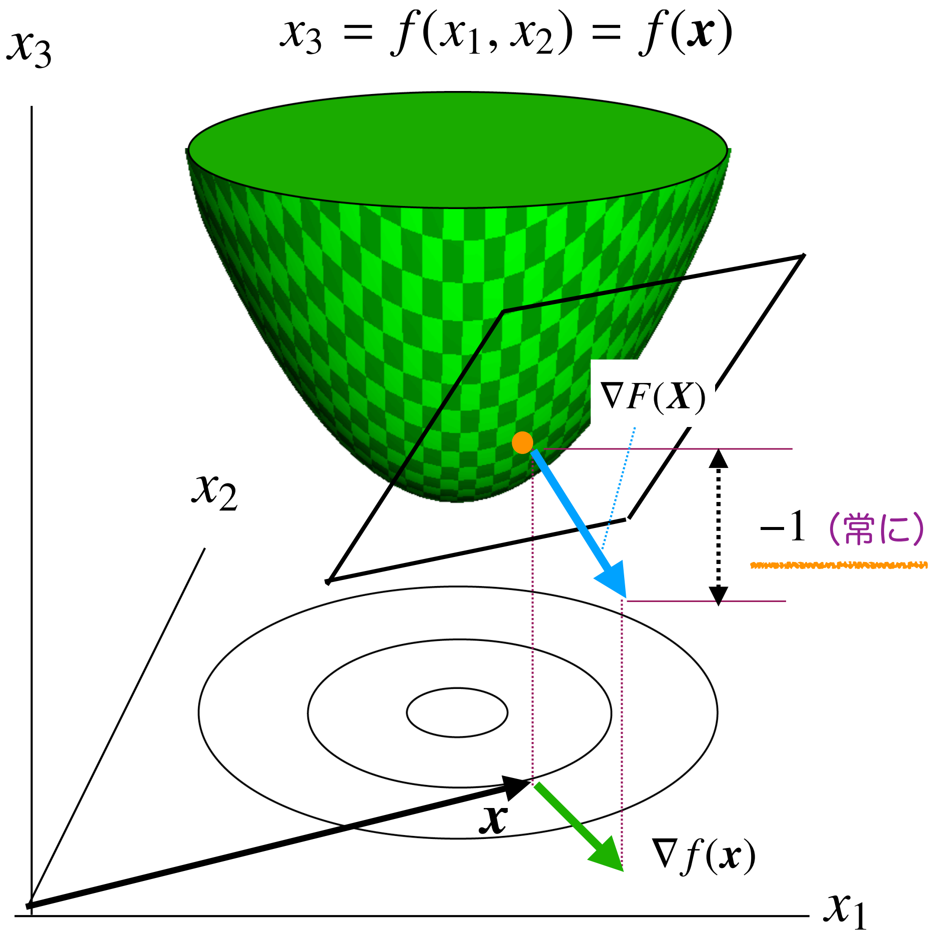
次元を拡張した3次元スカラー場：

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$$
$$= F(\boldsymbol{X}) \qquad \because \ \boldsymbol{X} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T$$

元の関数曲面は： $F(\boldsymbol{X}) = 0$

関数曲面の上方： $F(\boldsymbol{X}) < 0$

下方： $F(\boldsymbol{X}) > 0$



$\nabla F(\boldsymbol{X})$ は $\boldsymbol{X}$ における等関数値曲面

$F(\boldsymbol{X}) = 0$ に垂直で増加方向のベクトル

↓

$\boldsymbol{X}$ における接平面に垂直なベクトル

$$\nabla F(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{X}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nabla f(\boldsymbol{x}) \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$\nabla f(\boldsymbol{x})$ は $\nabla F(\boldsymbol{X})$ の定義域への射影ベクトル

多変数ベクトル値関数（ベクトル場）の全微分

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$$

各成分が多変数スカラー値関数

$$\mathrm{d}\boldsymbol{g} = \begin{Bmatrix} \mathrm{d}g_1 \\ \mathrm{d}g_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{g} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

：勾配テンソル

関数値の微分ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ は

勾配テンソル $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}$ による

$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ の線形変換で与えられる

スカラー場，ベクトル場の「勾配」

$f(\boldsymbol{x})$：多変数スカラー値関数（スカラー場）

勾配ベクトル：
$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$$

スカラー場（0階テンソル）の勾配
⇒ ベクトル場（1階テンソル）

数ベクトル表現：
$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$
：基底を固定して同一視

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$：多変数ベクトル値関数（ベクトル場）

勾配テンソル：
$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2)\cdots$$
$$= \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)$$

ベクトル場（1階テンソル）の勾配
⇒ テンソル場（2階テンソル）

行列表現：
$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$
：基底を固定して同一視

勾配演算と基底

$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_j\delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_j\left(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\right) \cdot \left(\mathrm{d}x_j\boldsymbol{e}_j\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{g} &= \mathrm{d}g_i\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_k\delta_{jk}\right)\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_k\left(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k\right)\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)\right)(\mathrm{d}x_k\boldsymbol{e}_k) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

勾配演算子（ベクトル）： $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$

（機械的操作として）：場の「勾配」を取るときは，∇ を後ろからテンソル積

１）スカラー場（０階テンソル場）の勾配（前後の区別なし）

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\right) f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$$

２）ベクトル場（1階テンソル場）の勾配

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{g} \otimes \nabla = (g_i \boldsymbol{e}_i) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j\right) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)$$

３）テンソル場（2階テンソル場）の勾配

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H} \otimes \nabla = \left[H_{ij}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)\right] \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k\right) = \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_k}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k\right)$$

まとめ：微分可能性・全微分

全微分　$\mathrm{d}\,(*)$ $\Rightarrow$ 関数値および独立変数の極限的微小量

微分可能性 $\Leftrightarrow$ 関数値の全微分独立変数の全微分には一次の関係
そして，その関係を与える幾何学的関係がある．

$$f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

：接線が存在

$$f(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

：接平面が存在

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\boldsymbol{g} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

：各成分のスカラー場に接平面が存在

方向微分（１次元）と合成関数の微分

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ のとき，$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha)-f(x)}{h}$ は？

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha)-f(x)}{ah}\cdot a=f'(x)\,a$$

$\phi(h)=f(x+ha)$ とおけば,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-\phi(0)}{h}=\phi'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x+ha)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}$$

ここで，$x(h)=x+ha$ として，合成関数の微分法を適用すれば

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x+ha)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}x(h)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}=f'(x)\cdot a$$

$\Rightarrow$ 方向微分は合成関数の微分として計算可能！

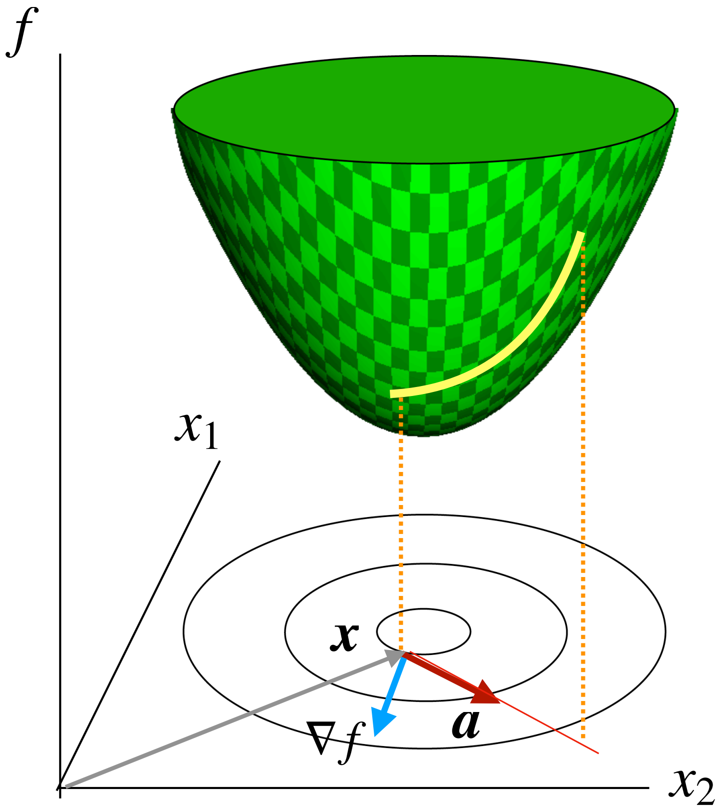
$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha)-f(x)}{\mathrm{d}h}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x+ha)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}=f'(x)\,a$$

スカラー場の方向微分

$$(\times)\cdots \quad \lim_{\Delta \boldsymbol{x}\to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})}{\Delta\boldsymbol{x}}$$ （数学にベクトルでの割り算は無い）

方向微分： $$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})}{h} = \nabla f\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a}$ を1単位とする方向の関数値の微分



$\phi(h) = f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{x}(h) = \boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a}$ として

合成関数の微分を適用

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-\phi(0)}{h} = \phi'(0)$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(h)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}$$
$$= \nabla f\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}$ （単位ベクトル）のとき,

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial n}$$ ：方向微係数

n は通常の長さの測度だから.

スカラー値ベクトル関数のガトー微分・変分

（例）エネルギー汎関数 $\mathcal{F}(\boldsymbol{u})$， $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$（変位ベクトル場）

ガトー（Gateaux）微分： $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{u}+h\boldsymbol{a})-\mathcal{F}(\boldsymbol{u})}{h} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{a}$

＊ 方向微分の拡張として考えれば良い

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{u}+h\boldsymbol{a})-\mathcal{F}(\boldsymbol{u})}{h} = \left.\frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{u}+h\boldsymbol{a})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}+h\boldsymbol{a})}{h} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{a}$$

変分： $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{u}+h\,\delta\boldsymbol{u})-\mathcal{F}(\boldsymbol{u})}{h} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \delta\boldsymbol{u}$

＊ 定ベクトル $\boldsymbol{a}$ の代わりに変位ベクトルの変動（変分） $\delta\boldsymbol{u}$ としたガトー微分のこと.

＊ $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}$ に伴う $\mathcal{F}$ の変分（第一変分）と呼んで $\delta\mathcal{F}$ と表すこともある.

ベクトル場の方向微分

（方向微分） $$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{h}=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}$$

（導出）： $\phi(h)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{x}(h)=\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a}$ として合成関数の微分法を適用

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)-\phi(0)}{h}=\phi'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}=\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(h)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0}$$

$$=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}$$

参考：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{h}=\mathrm{d}_a\boldsymbol{g}$$ （ベクトル）とおけば，各成分はスカラー場だから・・・

$$\mathrm{d}_a\boldsymbol{g}=\lim_{h\to 0}\begin{Bmatrix}\dfrac{g_1(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-g_1(\boldsymbol{x})}{h}\\[2ex] \dfrac{g_1(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-g_1(\boldsymbol{x})}{h}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}a_1+\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}a_2\\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}a_1+\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}a_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix}=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}$$

関数（一般）のガトー微分・変分

テンソル値 or ベクトル値関数 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})$ ， $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})$ (ベクトル場 or テンソル場)

ガトー（Gateaux）微分：
$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})}{h} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\xi}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})}{h} = \left.\frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{\xi})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{\xi})}{h} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\xi}$$

変分：
$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}+h\delta\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})}{h} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\delta\boldsymbol{\eta}$$

まとめ：方向微分，ガトー微分・変分

合成関数の微分法により計算が可能

定義域の一方向（1次元部分空間）における関数値の全微分

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ha)-f(\boldsymbol{x})}{h} = \left.\frac{\mathrm{d}f(x+ha)}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = f'(x)\,a \quad \Rightarrow \quad \therefore\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = f'(x)\,a \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}f = \left(f'(x)\,a\right)\,\mathrm{d}h$$

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}h \quad \to \quad \mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \quad \therefore\ \mathrm{d}f = \left(f'(x)\,a\right)\mathrm{d}h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = f'(x)\,a$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{x})}{h} = \left.\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \therefore\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a}\right)\mathrm{d}h$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}h \quad \to \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad \Rightarrow \quad \therefore\ \mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a}\right)\mathrm{d}h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta})}{h} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{\xi})}{\mathrm{d}h}\right|_{h=0} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\,\boldsymbol{\xi} \quad \Rightarrow \quad \therefore\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}h} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\,\boldsymbol{\xi} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\boldsymbol{G} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\,\boldsymbol{\xi}\right)\mathrm{d}h$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}h \quad \to \quad \mathrm{d}\boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \qquad \Rightarrow \quad \therefore\ \mathrm{d}\boldsymbol{G} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\,\boldsymbol{\xi}\right)\mathrm{d}h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}h} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\eta}}\,\boldsymbol{\xi}$$