総和規約の練習

総和規約（Einstein's summation convention）

規約１：指標 i, j, k, ・・は数字1, 2, 3 を代表し，1, 2, 3 が順不同で入ることができる.

規約２：同じ指標は同一項に最大２回までしか現れてはいけない.

規約３：同一項に２回現れている指標には 1, 2, 3 すべての数字を入れて和を取る.

指標は２種類（自由指標とダミー指標）

自由指標（free index）：同一項に１回だけ現れる指標

$$\underline{a_i} + \underline{b_i} = \underline{c_i} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = c_1 \\ a_2 + b_2 = c_2 \\ a_3 + b_3 = c_3 \end{cases}$$

1, 2, 3 が順不同で入る
⇒ ３本の等式を表す

指標の文字が何であるかは重要．等式の左右にある自由指標は必ず一致.

$$a_i + b_i = c_j \quad \cdots (\times)$$

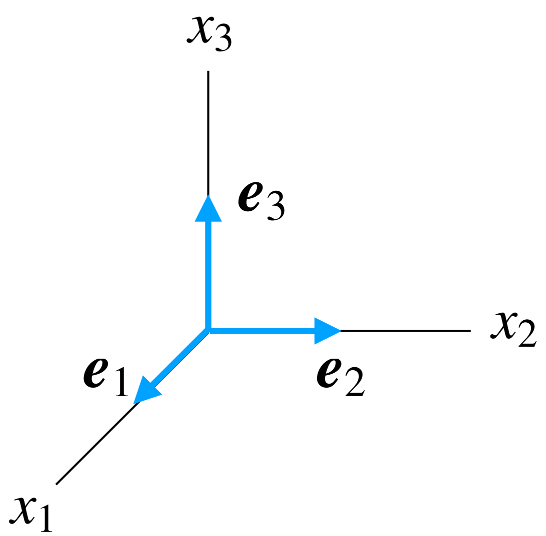
意味不明の式．左右で 1, 2, 3 の対応が不明

ダミー指標（dummy index）：同一項に２回現れて和を取る指標

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \underline{u_i v_i} = \underline{u_j v_j}$$

２回現れていることに意味があり，指標の文字は何であってもよい．
等式の左右で文字が異なっても構わない．
⇒　だから「ダミー」

正規直交基底とベクトル（1階テンソル）



正規直交基底：$[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3]$　長さが１で互いに直交する基底

・正規直交基底の内積とクロネッカーのデルタ

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

正規直交基底によるベクトルの表現

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = u_i\boldsymbol{e}_i$$

正規直交基底　$[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3]$ を固定すれば・・・

$$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{e}_i \quad \rightarrow \quad u_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

（ベクトル）　（自由指標表記）　数ベクトル表記

・ベクトルと自由指標による表記および数ベクトル表記を同一視

・基底を隠して単独で扱うと自由指標

ベクトルの内積

（基本）：基底付きの計算（完璧にマスターすること．最後の拠り所）

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (u_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(u_j\boldsymbol{e}_j)$$ ← 同じ指標は２度まで！　スタートが大事

$$= u_i v_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)$$ ← 内積は線形演算．係数とベクトルを分ける.

$$= u_i v_j \delta_{ij}$$ ← 正規直交基底の内積はクロネッカーデルタ.

$$= u_i v_i = u_j v_j$$ ← i = j のときしか項は残らない.
j を i に変えてδを消す（i を j にしてもOK).

◎ スタートできちんと総和規約を守れば，後は機械的な操作だけ！

行列・数ベクトルとの関係

$$\boldsymbol{u} = (u_i \boldsymbol{e}_i) \;\rightarrow\; \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = (v_i \boldsymbol{e}_i) \;\rightarrow\; \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \quad \rightarrow \quad \{u\}^T \{v\} = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$= u_i v_i = u_j v_j$$

◎正規直交基底を用いた内積計算と行列（数ベクトル）の内積計算は調和的！

ベクトルのテンソル積　$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$

・１階テンソル（ベクトル）のテンソル積は２階テンソル

・２階テンソルは１階テンソルに対する線形変換作用素

テンソル積による線形変換

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u} \ , \quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v}$$

変換するベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して，接触した方のベクトルと内積

⇒　残った方のベクトルを内積（実数）倍したベクトルになる.

テンソル積同士の積

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{z})$$

接触した方のベクトルと内積

⇒　残った外側のベクトル同士のテンソル積を
内積倍した２階テンソルになる.

テンソル積 ⊗ について

どうしてこのようにするのか？

⇒　そう決めると全てが
うまくいくから・・・

慣れるしかない！

（基本）：基底付きの計算 （完璧にマスターすること．最後の拠り所）

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = \Big((u_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(v_j\boldsymbol{e}_j)\Big)(w_k\boldsymbol{e}_k)$$

← 同じ指標は２度まで！

$$= \Big(u_i v_j(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\Big)(w_k\boldsymbol{e}_k)$$

係数とベクトルを分ける.

$$= u_i v_j w_k \Big((\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k\Big)$$

← （第１行から一気にこの式でもよい）

$$= u_i v_j w_k \delta_{jk}\boldsymbol{e}_i$$

$$= u_i v_j w_j \boldsymbol{e}_i$$

$$= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$$

接触した正規直交基底同士の内積.

$$\boxed{(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k) = \delta_{jk}\boldsymbol{e}_i}$$

j = k のときしか項は残らない.
k を j に変えてδを消す.

内積！

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{z}) = \Big((u_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(v_j\boldsymbol{e}_j)\Big)((w_k\boldsymbol{e}_k)\otimes(z_l\boldsymbol{e}_l))$$ 同じ指標は２度まで！

$$= u_i v_j w_k z_l(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)$$ 係数とベクトルを分ける.

$$= u_i v_j w_k z_l \delta_{jk}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_l)$$ テンソル積の演算ルール

$$= u_i v_j w_j z_l(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_l)$$ クロネッカーデルタを消す

$$= (v_j w_j)\left[(u_i\boldsymbol{e}_i)\otimes(z_l\boldsymbol{e}_l)\right]$$ 係数は順序の入れ替え自由

$$= (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{z})$$

行列・数ベクトルとの関係

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = (u_i \boldsymbol{e}_i) \otimes (u_j \boldsymbol{e}_j) = u_i v_j (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \quad \leftarrow$$

直交基底のテンソル積（9個）の線形結合

$$\rightarrow \quad \{u\}\{v\}^T = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

ベクトルのテンソル積は，２つの３次元数ベクトルから３×３正方行列を作る行列演算

２階テンソルの直交基底による表現（９個のテンソル積の線形結合）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_{11}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) + A_{12}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2) + \cdots + A_{33}(\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3) \\ &= A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \boldsymbol{e}_3]$ を固定すれば
３×３正方行列と同一視できる

◎ テンソル積に関する演算ルールは行列演算と調和的！

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$$

$$\rightarrow \left(\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \{ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \}}_{(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})} \right) \underset{\boldsymbol{w}}{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}} = \underset{\boldsymbol{u}}{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}} \left(\underbrace{\{ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}}_{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})} \right)$$

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{z})$$

$$\rightarrow \left(\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \{ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \}}_{(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})} \right) \left(\underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \{ z_1 \quad z_2 \quad z_3 \}}_{(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{z})} \right) = \underset{\boldsymbol{u}}{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}} \left(\underbrace{\{ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}}_{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})} \right) \underset{\boldsymbol{z}}{\{ z_1 \quad z_2 \quad z_3 \}}$$

$$= \left(\underbrace{\{ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}}_{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \{ z_1 \quad z_2 \quad z_3 \}}_{(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{z})}$$

行列演算は結合則が成立

項の順番を変えなければ
どこか計算してもよい！

一般の２階テンソルによる１階テンソル（ベクトル）の線形変換

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \left[A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\right](u_k \boldsymbol{e}_k)$$ 同じ指標は２度まで！

$$= A_{ij} u_k (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k$$ 係数とベクトルを分ける.

$$= A_{ij} u_k \delta_{jk} \boldsymbol{e}_i$$ テンソル積の演算ルールを適用

$$= A_{ij} u_j \boldsymbol{e}_i = v_i \boldsymbol{e}_i$$ クロネッカーデルタを消す

$\boldsymbol{e}_i$ を消すと自由指標を含む指標表記になる！

$$\therefore \quad v_i = A_{ij} u_j$$

行列表現すれば・・・

$$\rightarrow \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

やはりテンソル積の演算ルールは行列計算と調和的！

２階テンソル（テンソル積）の内積

・２つのテンソル積から実数を作る演算

演算ルール:

$$\overbrace{(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) : (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d})} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})$$

内積

内積

一般の２階テンソルの内積

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} = [A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)] : [B_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)]$$

同じ指標は２度まで！

$$= A_{ij}B_{kl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)$$

係数とベクトルを分ける

$$= A_{ij}B_{kl}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)$$

テンソル積の内積ルールを適用

$$= A_{ij}B_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

クロネッカーデルタを消す

$$= A_{ij}B_{ij}$$

⇒　対応する９個の (i, j) 成分の積和になる.

対応する行列演算は・・・

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} = A_{ij}B_{ij} = \underline{\mathrm{tr}\left([A]^T[B]\right) = \mathrm{tr}\left([A][B]^T\right)}$$

見通しの悪い式．取りあえず知っておく．

恒等テンソルとの内積，行列のトレース（対角項の和）

恒等テンソル，表現行列は恒等行列

$$\boldsymbol{I} = \delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \quad \rightarrow \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

恒等テンソルと２階テンソルの内積

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} : \boldsymbol{A} &= [\delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)] : [A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)] && \text{同じ指標は２度まで！} \\ &= \delta_{ij}A_{kl}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) && \text{係数とベクトルを分ける} \\ &= \delta_{ij}A_{kl}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l) && \text{テンソル積の内積ルールを適用} \\ &= \delta_{ij}A_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} && \text{クロネッカーデルタを消す} \\ &= A_{ii} = \mathrm{tr}[A] \end{aligned}$$

ベクトル（１階テンソル）と２階テンソルの成分

ベクトル（１階テンソル）の成分：　$x_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i = (x_k \boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_i = x_k (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) = x_k \delta_{ki} = x_i$$

２階テンソルの成分：　$A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_j$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_j &= \boldsymbol{e}_i \cdot [A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)]\, \boldsymbol{e}_j \\
&= \boldsymbol{e}_i \cdot \left(A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \boldsymbol{e}_j \right) \\
&= \boldsymbol{e}_i \cdot \left(A_{kl} \delta_{jl} \boldsymbol{e}_k \right) \\
&= A_{kl} \delta_{jl} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k) \\
&= A_{kl} \delta_{jl} \delta_{ik} \\
&= A_{ij}
\end{aligned}$$

内積よりもテンソル積による変換が先.
ベクトルにしないと内積できないから！

２階テンソルの転置テンソル

[定義]：２階テンソル $\boldsymbol{A} = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$ に対して，次式を満たす $\boldsymbol{A}^T$ が一意に存在する．$\boldsymbol{A}$ の転置テンソルという．

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} \quad \text{for} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$$

「内積記号（・）を跨ぐと転置になる」と覚える．

転置テンソルの基底付き表現，転置行列

$$\boldsymbol{A}^T = A^T_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = A_{ji}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \quad \to \quad [A^T] = [A]^T$$

何故なら (i, j) 成分について以下が成り立つから．

$$A^T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = A_{ji}$$

$$\therefore \quad A^T_{ij} = A_{ji}$$

２階テンソルの内積と行列のトレースの関係

$$\boxed{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}B_{ij} = \mathrm{tr}\left([A]^T[B]\right) = \mathrm{tr}\left([A][B]^T\right)}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left([A]^T[B]\right) &= \boldsymbol{I} : (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}) \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left([A][B]^T\right) &= \boldsymbol{I} : (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

２階テンソルの内積と行列のトレースの関係

$$\boxed{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}B_{ij} = \mathrm{tr}\left([A]^T[B]\right) = \mathrm{tr}\left([A][B]^T\right)}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left([A]^T[B]\right) &= \boldsymbol{I} : (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}) \\
&= [\delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)] : [A_{lk}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)][B_{mn}(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n)] \\
&= \delta_{ij}A_{lk}B_{mn}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : [(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n)] \\
&= \delta_{ij}A_{lk}B_{mn}\delta_{lm}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_n) \\
&= \delta_{ij}A_{lk}B_{mn}\delta_{lm}\delta_{ik}\delta_{jn} = \delta_{ij}A_{lk}B_{lj}\delta_{ik} \\
&= A_{li}B_{li} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left([A][B]^T\right) &= \boldsymbol{I} : (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T) \\
&= [\delta_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)] : [A_{kl}(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)][B_{nm}(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n)] \\
&= \delta_{ij}A_{kl}B_{nm}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : [(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n)] \\
&= \delta_{ij}A_{kl}B_{nm}\delta_{lm}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) : (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_n) \\
&= \delta_{ij}A_{kl}B_{nm}\delta_{lm}\delta_{ik}\delta_{jn} = \delta_{ij}A_{kl}B_{jl}\delta_{ik} \\
&= A_{il}B_{il} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

指標操作の眼力をつける！

1階テンソル（ベクトル）：

$$\underline{\boldsymbol{u}} = (u_i \boldsymbol{e}_i) \;\rightarrow\; \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \;\rightarrow\; \underline{u_i}$$

成分の代表

２階テンソル：

$$\underline{\boldsymbol{A}} = A_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \;\rightarrow\; [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \underline{A_{ij}}$$

成分の代表

ベクトルの内積

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \quad \rightarrow \quad \{u\}^T\{v\} = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

← 矢印に沿って積和！

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\rightarrow \quad u_i v_i$$

← だから，指標表記はこうなる

ダミー指標：i=1,2,3として総和を取る

・・・と，瞬時に判るようになるまで眼力を鍛える！

2階テンソルの内積

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ij}$$

← 「対応する９個の(i, j)成分の積和」と覚える.

2階テンソルによるベクトルの変換

$$\boldsymbol{Au} \;\rightarrow\; [A]\{u\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \\ i \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \\ & A_{ij} \end{array} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{1j}u_j \\ A_{2j}u_j \\ A_{3j}u_j \end{Bmatrix}$$

2階テンソルによるベクトルの変換

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \;\rightarrow\; [A]\{u\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

i（ =1,2,3 ）行毎に矢印に沿って積和！

$$\rightarrow \; A_{ij}u_j$$

← だから，指標表記はこうなる！

ダミー指標：i=1,2,3として総和を取る

転置テンソルによるベクトルの変換

成分の並び方：

$$[A]^T = \begin{bmatrix} \boxed{A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}} \\ \boxed{A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}} \\ \boxed{A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}} \end{bmatrix} \qquad [A] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \;\rightarrow\; \overbrace{[A]^T}\{u\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}}^{[A]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A_{ji}u_j$$

$[A]$ で見れば積和は縦方向

＊ $\left(\rightarrow\; A^T_{ij}u_j = A_{ji}u_j\right)$ とワンクッション置くのはまだるっこしい！

＊「転置は指標の順を入れ替える」と覚えるべし！

2階テンソルの積

$$\boldsymbol{AB} \rightarrow [A][B] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A_{i\underline{k}} B_{\underline{k}j}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} \rightarrow [A]^T[B] = \overset{[A]}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}} \overset{[B]}{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}}$$

$$\rightarrow \quad A_{\underline{k}i} B_{\underline{k}j}$$

以上が基本．後は練習あるのみ！