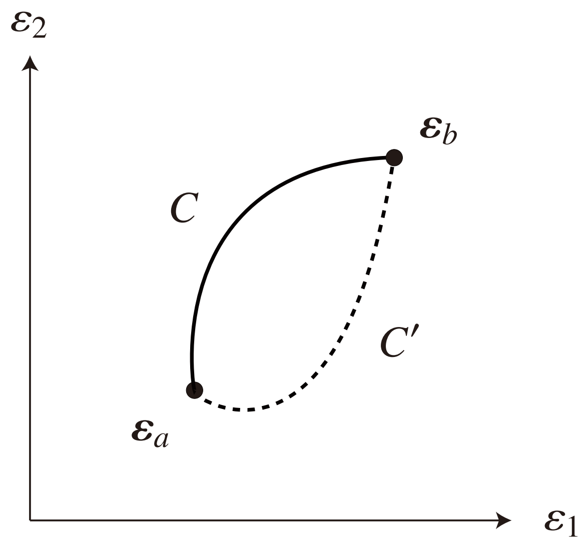
・ひずみエネルギーの存在

・最小ポテンシャルエネルギー原理

ひずみエネルギー関数

経路Cに沿う仕事．一般には経路に依存．

$$W\left(\boldsymbol{\varepsilon}_a \xrightarrow{C} \boldsymbol{\varepsilon}_b\right) = \int_C \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) : d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_C \sigma_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\varepsilon_{ij}$$



構成則が積分可能な場合（原始関数が存在）

$$\int \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) : d\boldsymbol{\varepsilon} = U(\boldsymbol{\varepsilon}) + c$$

仕事は始めと終わりの状態だけで決まる．

$$\begin{aligned} W\left(\boldsymbol{\varepsilon}_a \xrightarrow{C} \boldsymbol{\varepsilon}_b\right) &= \int_C \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) : d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}_a}^{\boldsymbol{\varepsilon}_b} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= U(\boldsymbol{\varepsilon}_b) - U(\boldsymbol{\varepsilon}_a) \end{aligned}$$

$U(\boldsymbol{\varepsilon})$ は状態量．ひずみエネルギー関数．

線形弾性体のひずみエネルギー関数

線形弾性体の構成則　$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\ ,\quad \sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

$D_{ijkl} = D_{klij}$ のとき $U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ が存在する.

$$
\begin{aligned}
dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{1}{2} D_{klmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} \right) d\varepsilon_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\left(D_{klmn}\delta_{ki}\delta_{lj}\varepsilon_{mn} + D_{klmn}\delta_{mi}\delta_{nj}\varepsilon_{kl} \right) d\varepsilon_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\left(D_{ijmn}\varepsilon_{mn} + D_{klij}\varepsilon_{kl} \right) d\varepsilon_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\left(D_{ijkl} + D_{klij} \right) \varepsilon_{kl}\ d\varepsilon_{ij} \\
&= \underline{D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\ d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \qquad \left(\text{if}\ \ D_{ijkl} = D_{klij} \right)}
\end{aligned}
$$

$$
\int \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) : d\boldsymbol{\varepsilon} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int dU = \underline{U(\boldsymbol{\varepsilon}) + c}
$$

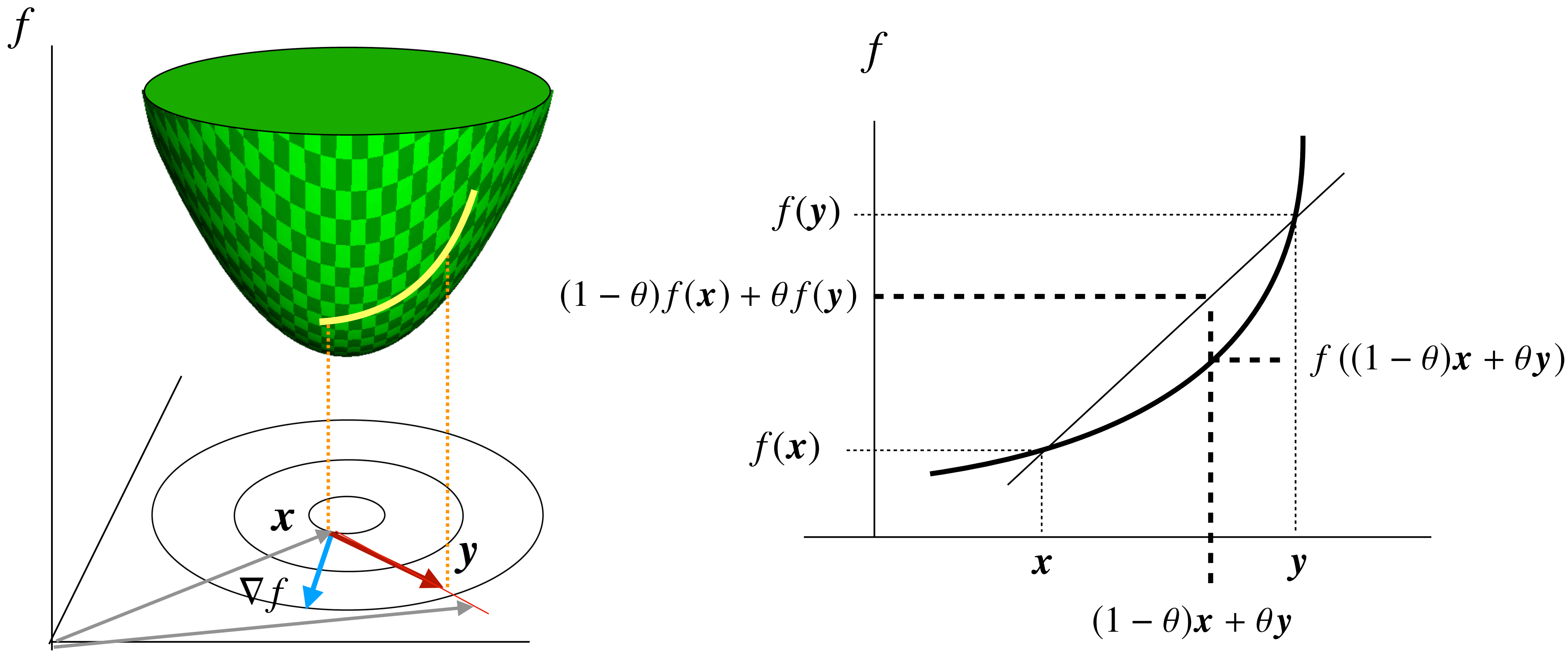
$$
\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\ ,\qquad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}
$$

(超弾性構成則)

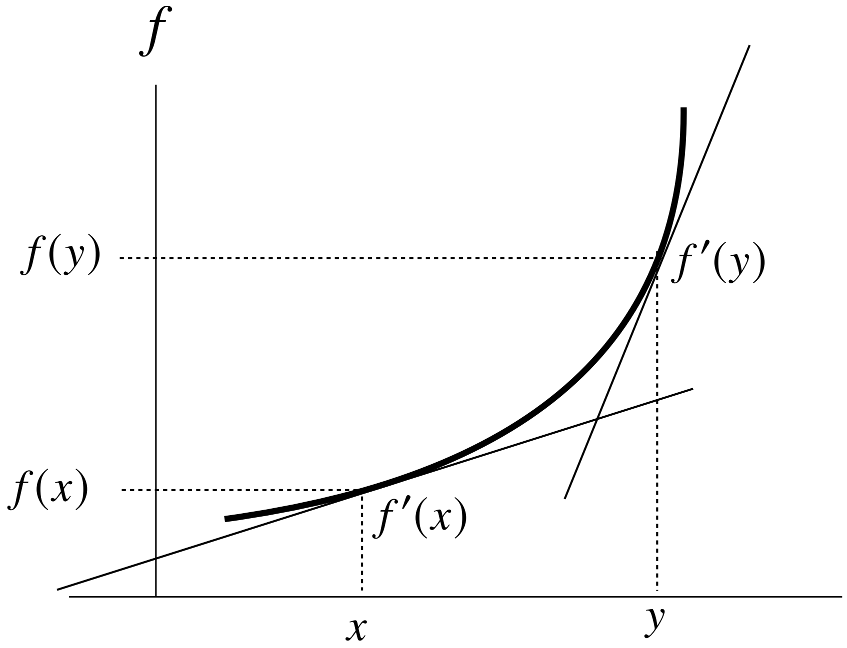
凸関数

凸関数であるための必要十分条件

$$\forall\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\ :\quad (1-\theta)f(\boldsymbol{x})+\theta f(\boldsymbol{y}) \geq f\left((1-\theta)\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{y}\right),\quad 0\leq\theta\leq 1$$



微分可能な場合（一次元）



$$(1-\theta)f(x)+\theta f(y) \geq f\left((1-\theta)x+\theta y\right)$$

$$\theta\left(f(y)-f(x)\right) \geq f\left((1-\theta)x+\theta y\right)-f(x)$$

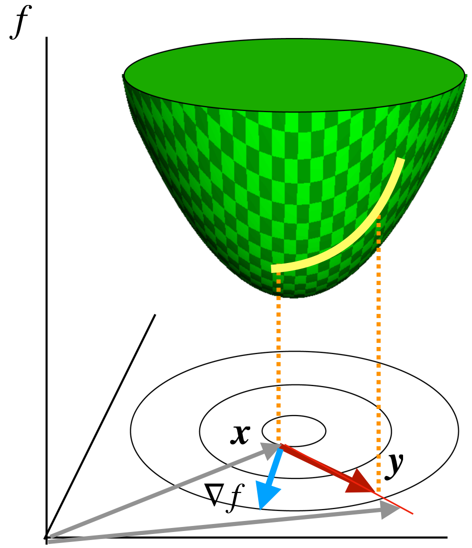
$$f(y)-f(x) \geq \lim_{\theta\to 0}\frac{f\left(x+\theta(y-x)\right)-f(x)}{\theta} = f'(x)(y-x)$$

$$\therefore\ f(y)-f(x) \geq f'(x)(y-x)$$
$$f(x)-f(y) \geq f'(y)(x-y)$$

$$0 \geq \left(f'(y)-f'(x)\right)(x-y)\,, \quad \therefore\ \left(f'(x)-f'(y)\right)(x-y) \geq 0$$

導関数は単調増加

微分可能な場合（多変数関数）



$$(1-\theta)f(\boldsymbol{x})+\theta f(\boldsymbol{y}) \geq f\left((1-\theta)\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{y}\right)$$

$$\theta\left(f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\right) \geq f\left((1-\theta)\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{y}\right)-f(\boldsymbol{x})$$

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}) \geq \lim_{\theta\to 0}\frac{f\left(\boldsymbol{x}+\theta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right)-f(\boldsymbol{x})}{\theta} = \nabla f(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

$$\therefore\ f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}) \geq \nabla f(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}), \quad f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}) \geq \nabla f(\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

$$0 \geq \left(\nabla f(\boldsymbol{y})-\nabla f(\boldsymbol{x})\right)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad \therefore\ \left(\nabla f(\boldsymbol{x})-\nabla f(\boldsymbol{y})\right)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \geq 0$$

勾配ベクトルが単調増加

ひずみエネルギー関数の凸性

凸関数であるための必要十分条件

$$\forall\ \boldsymbol{\varepsilon}_a,\ \boldsymbol{\varepsilon}_b$$

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}_b) - U(\boldsymbol{\varepsilon}_a) \geq \left.\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}_a} : (\boldsymbol{\varepsilon}_b - \boldsymbol{\varepsilon}_a)\ , \quad U(\boldsymbol{\varepsilon}_b) - U(\boldsymbol{\varepsilon}_a) \geq \left.\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}_a} \left(\varepsilon_{ij}^b - \varepsilon_{ij}^a\right)$$

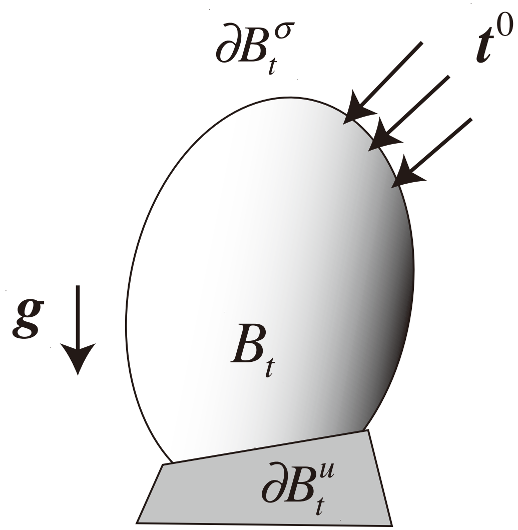
行列表記すると： $U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \dfrac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}$, $\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = [D]\{\varepsilon\}$ だから,

$$\begin{aligned}
&U(\boldsymbol{\varepsilon}_b) - U(\boldsymbol{\varepsilon}_a) - \left.\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}_a} : (\boldsymbol{\varepsilon}_b - \boldsymbol{\varepsilon}_a) \\
&= \frac{1}{2}\{\varepsilon_b\}^T[D]\{\varepsilon_b\} - \frac{1}{2}\{\varepsilon_a\}^T[D]\{\varepsilon_a\} - ([D]\{\varepsilon_a\})^T(\{\varepsilon_b\} - \{\varepsilon_a\}) \\
&= \underline{\frac{1}{2}(\{\varepsilon_b\} - \{\varepsilon_a\})^T[D](\{\varepsilon_b\} - \{\varepsilon_a\})}
\end{aligned}$$

$[D]$ が準正定値（固有値が非負）ならば凸.

最小ポテンシャルエネルギーの原理

系のポテンシャルエネルギー：



$$\Psi(\boldsymbol{u}) = \underbrace{\int_{B_t} U(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))dV}_{\text{ひずみエネルギーポテンシャル}} \underbrace{- \int_{B_t} \rho g_i u_i dV - \int_{\partial B_t^\sigma} t_i^0 u_i dS}_{\text{外力ポテンシャル}}$$

正解の変位場 $\boldsymbol{u}$，任意の運動学的可容変位場 $\boldsymbol{u}^k$

$$\Psi(\boldsymbol{u}^k) - \Psi(\boldsymbol{u}) = \int_{B_t} \left(U(\boldsymbol{\varepsilon}^k) - U(\boldsymbol{\varepsilon}) \right) dV$$

$$- \int_{B_t} \rho g_i \left(u_i^k - u_i \right) dV - \int_{\partial B_t^\sigma} t_i^0 \left(u_i^k - u_i \right) dS$$

$$= \int_{B_t} \Bigg[\underbrace{U(\boldsymbol{\varepsilon}^k) - U(\boldsymbol{\varepsilon}) - \left.\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})} \left(\varepsilon_{ij}^k - \varepsilon_{ij} \right)}_{\text{ひずみエネルギーは凸だから非負}} \Bigg] dV \geq 0$$

正解の変位場のとき，ポテンシャルエネルギー $\Psi(\boldsymbol{u})$ は最小値.

問題の正解 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})$

$$u_i = u_i^0 \qquad \text{on } \partial B_t^u$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \text{in } \partial B_t$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \qquad \text{in } B_t$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^0 \qquad \text{on } \partial B_t^\sigma$$

$$\sigma_{ij} = \left.\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{B_t} \rho g_i \left(u_i^k - u_i\right) dV + \int_{\partial B_t^\sigma} t_i^0 \left(u_i^k - u_i\right) dS \\
&= \int_{B_t} \left(-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)\left(u_i^k - u_i\right) dV + \int_{\partial B_t^\sigma} \sigma_{ij} n_j \left(u_i^k - u_i\right) dS + \int_{\partial B_t^u} \sigma_{ij} n_j \left(u_i^0 - u_i^0\right) dS \\
&= \int_{B_t} \left(-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)\left(u_i^k - u_i\right) dV + \int_{B_t} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}\left(u_i^k - u_i\right)\right] dV \\
&= \int_{B_t} \left(-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)\left(u_i^k - u_i\right) dV + \int_{B_t} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\left(u_i^k - u_i\right) dV + \int_{B_t} \sigma_{ij} \frac{\partial \left(u_i^k - u_i\right)}{\partial x_j} dV \\
&= \int_{B_t} \left.\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})} \left(\varepsilon_{ij}^k - \varepsilon_{ij}\right) dV
\end{aligned}$$

汎関数 $\Psi(\boldsymbol{u})$ の第一変分

$\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}$ としたときの $\Psi(\boldsymbol{u})$ の変化量，すなわちガトー微分（方向微分）

$$\delta\Psi = \left.\frac{d\,\Psi(\boldsymbol{u} + h\delta\boldsymbol{u})}{dh}\right|_{h=0} = \left.\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{u}(h))}{\partial\boldsymbol{u}(h)} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}(h)}{dh}\right|_{h=0} \qquad \because\ \boldsymbol{u}(h) = \boldsymbol{u} + h\delta\boldsymbol{u}$$

$$= \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{u}} \cdot \delta\boldsymbol{u} = \nabla_u\Psi \cdot \delta\boldsymbol{u}$$

○　ひずみエネルギーの第一変分

$$\delta U(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) = \left.\frac{dU\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} + h\delta\boldsymbol{u})\right)}{dh}\right|_{h=0} = \left.\frac{\partial U(\boldsymbol{\varepsilon}(h))}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(h)} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}(h)}{dh}\right|_{h=0} = \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

何故なら，

$$\boldsymbol{\varepsilon}(h) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} + h\delta\boldsymbol{u}) = \left[\frac{\partial(\boldsymbol{u} + h\delta\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{x}}\right]_{sym.} = \left[\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}} + h\frac{\partial(\delta\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{x}}\right]_{sym.}$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon} + h(\delta\boldsymbol{\varepsilon})$$

だから.

ポテンシャルエネルギーの第一変分

任意の運動学的可容変位場　⇒　何も言えない！

$$\delta\Psi(\boldsymbol{u}^k) = \int_{B_t} \left.\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^k)} \delta\varepsilon_{ij} dV - \int_{B_t} \rho g_i\ \delta u_i dV - \int_{\partial B_t^\sigma} t_i^0\ \delta u_i dS$$

$$= \int_{B_t} \sigma_{ij}^k\ \delta\varepsilon_{ij} dV - \int_{B_t} \rho g_i\ \delta u_i dV - \int_{\partial B_t^\sigma} t_i^0\ \delta u_i dS$$

静的可容応力とは言えない

正解の変位場　⇒　正解の変位場で停留値

$$\delta\Psi(\boldsymbol{u}) = \int_{B_t} \left.\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})} \delta\varepsilon_{ij} dV - \int_{B_t} \rho g_i\ \delta u_i dV - \int_{\partial B_t^\sigma} t_i^0\ \delta u_i dS$$

$$= \int_{B_t} \sigma_{ij}\ \delta\varepsilon_{ij} dV - \int_{B_t} \rho g_i\ \delta u_i dV - \int_{\partial B_t^\sigma} t_i^0\ \delta u_i dS = 0$$

静的可容応力

静的可容応力と運動学的可容変位の式　⇒　仮想仕事式の一つだからゼロ

⇒　ひずみエネルギーが凸ならば最小値（最小ポテンシャルエネルギー原理）