Transactions of JSCES, Paper No.20160024

熱変形制御を目的とする複合板のマルチスケールトポロジー最適化

Multiscale topology optimization for composite plates undergoing thermal displacement

西　紳之介 [1]，寺田　賢二郎 [2]，加藤　準治 [3], 西脇　眞二 [4], 泉井　一浩 [4]
Shinnosuke NISHI, Kenjiro TERADA, Junji KATO, Shinji NISHIWAKI and Kazuhiro IZUI

[1] 東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)
[2] 東北大学災害科学国際研究所 (〒980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)
[3] 東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
[4] 京都大学大学院工学研究科 機械理工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

The present study proposes a multiscale topology optimization method of cross-section structures that control the macroscopic thermal deformations of a thick composite plates. The proposed optimization method is based on the two-scale composite plate model, in which thick plate theory is employed at macro-scale, while three-dimensional solids are assumed for in-plane periodic microstructures (unit cells) whose scale is comparable with the plate's thickness. The process of the in-plane homogenization in a two-scale analysis corresponds to numerical plate testings (NPTs) to compute the macroscopic plate stiffness of the thick plate. In addition, the co-rotational formulation is employed to account for large displacement and rotation of the macroscopic plate structure, whereas material models used in in-plane unit cells, are assumed to be linearly elastic. The optimization problem that controls a nodal displacement of the macrostructure is selected as numerical examples, and their solutions are provided to demonstrate the capability of the proposed method.

Key Words: Multiscale topology optimization，Composite plates，Co-rotational formulation，In-plane homogenization, Thermal deformation

1. 緒　言

複合材料の性能は，用いる構成材料の材料特性はもちろんのこと，それらの幾何形状や組み合わせ方に大きく依存するため，求める性能に応じて適切なミクロ構造の形状，材料配置を決定する必要がある．求められる性能としては，高剛性化を図るなどして機械的な特性を高めるものが多いが，近年では複数の機能を持たせる多機能化の試みが広がっている [1–4]．その 1 例としてアクチュエータ機能があり，それらは外荷重のみならず温度や電流などといった外界からの作用に対して最適な変形を促すといったものである．

そのような複合材料は材料の組み合わせ方が多様である一方，その加工技術の限界もあり，実験による設計手法では最適形状を発見しにくいという課題が指摘されている．そのため数値解析による構造設計に関する研究が数多くなされており，なかでも複雑な構造，材料配置が可能な自由度の高い設計手法であるトポロジー最適化はこれまで多くの研究例が報告されてきた [5–8]．トポロジー最適化の研究はマクロ構造の設計のみならず，ミクロ構造をも設計対象とする均質化法に基づくマルチスケールトポロジー最適化手法が報告されるようになった [9–11]．しかし，これらの手法の多くは，2 次元あるいは 3 次元連続体モデルとして定式化され，ミクロ構造･マクロ構造ともにソリッド要素を用いた有限要素解析を前提としている場合がほとんどであり，面内方向にしかミクロ構造が周期的に配置されない複合板への適用例は未だ報告されていない．この理由として，Fig.1 に示すように面内にのみ周期性を有する複合板の場合，前述のマルチスケール解析が理論的拠り所としている通常の均質化法の適用対象外であることが挙げられる．このような板状構造物に対しては，ミクロには 3 次元固体力学理論，マクロには厚板理論を適用したマルチスケール解析手法の定式化が必要とされる．そのような背景のもと，Terada ら [12,13] は，数学的均質化法のように板厚や面内周期性の代表寸法をゼロにするような操作を行わず，ユニットセルを数値供試体とみたてて数値試験的に均質化剛性を算出する，新しいマルチスケール解析手法を確立した．この

* 原稿受付 2016 年 4 月 7 日, 改訂年月日 2016 年 10 月 14 日, 発行年月日 2016 年 11 月 15 日,
Manuscript received, April 07, 2016; final revision, October 14, 2016; published, November 15, 2016.

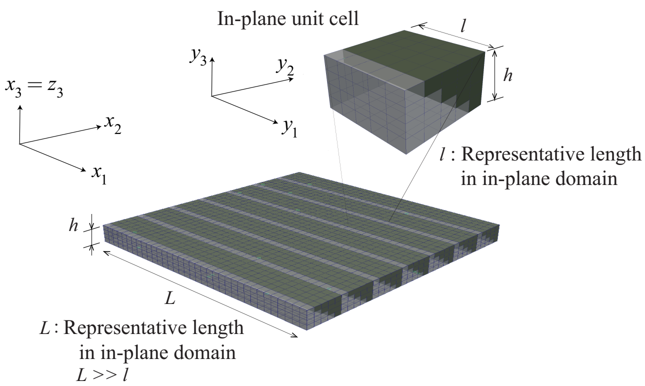

Fig. 1　Composite plate with in-plane periodicity

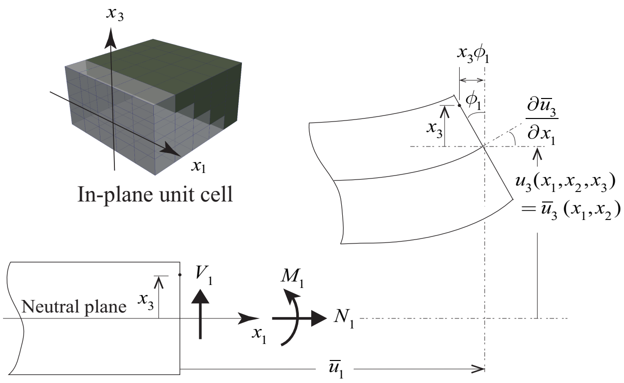

Fig. 2　Displacement field of thick plate theory

手法により，板厚方向の材料の違いにより生じる，面外せん断変形を含めた複雑な変形も再現可能となる．またこの手法は分離型マルチスケール解析手法 [14] の一つであるため，これをベースとする最適化手法 [15,16] のアルゴリズムを採用することができる．

先述の複合板のマルチスケール解析 [13] は微小変位・微小回転の理論の枠組みで定式化されている．しかし，アクチュエータなどの多機能化を目的とした場合，大変位・大回転を許容する幾何学的非線形解析への拡張は必須である．このための運動方程式の記述法には，トータル Lagrangian（TL），更新 Lagrangian（UL），そして共回転理論（co-rotational 以後 CR）がある．TL，UL を用いた解析は，それぞれ変形前，変形後を基準につり合い方程式を解く手法であり，非線形構造解析を行う上で一般的な手法であるといえる．しかし，これらの手法では有限変形理論に基づき非線形ひずみを用いて定式化が行われているため，微小変形理論で定式化されている複合板のマルチスケール解析への適用が非常に困難である．一方，CR による定式化は，物体の運動を剛体運動と弾性変形による部分に区別して考える手法であり，材料構成則については微小変形理論を用いるため複合板のマルチスケール解析手法によって得られた均質化板剛性をそのまま適用可能である．そのため，TL，UL と比較しても容易に複合板の有限変位マルチスケール解析を行うことが可能である．また，共回転理論による幾何学的非線形解析は，本解析で採用した板・シェル構造解析への適用性について多くの報告例 [17–19] があり，得られる解についても高い信頼性を有していることが分かっている．

そこで，本研究では面内に周期的な非均質性を有する複合板を対象とし，大変位・大回転を伴うマクロ構造の変形を制御するようなミクロ構造（面内ユニットセル）のトポロジーを決定するマルチスケール最適化計算手法の開発を目的とする．本手法では，複合板のマルチスケール解析 [13] を採用して，面内ユニットセルについては 3 次元連続体としてモデル化してソリッド要素を用い，マクロ構造については厚板曲げ理論を用いたフラットシェル要素 [20,21] を用いる．マクロ板構造については，材料は微小変形であるが，大変位・大回転問題を伴う問題にも対応できるように共回転理論を採用する．最適化計算については，分離型のマルチスケール最適化計算手法 [16] を用い，温度変化が与えられたときにマクロ構造の節点変位を指定した方向に最大化するような最適化問題を設定する．また，本最適化計算では感度解析に基づく最適化アルゴリズムを採用する．この際，感度については計算コストの面から解析的感度の導出を行う．最後に本提案手法を用いて得られた数値解析例を提示し，本手法の有用性を示す．

2. 複合板のための面内均質化法

本章では，面内周期性を有する複合板を対象としたマルチスケール解析手法について解説する．対応する 2 変数境界値問題の設定に際して，マクロ構造には厚板理論を，ミクロ構造（面内ユニットセル）については 3 次元固体力学を適用し，マクロ構造解析を行うための，面内ユニットセルを反映した均質化板剛性を定義する．

まず，マクロ構造に対して厚板理論を採用すると，マクロ座標系 $\boldsymbol{x}$ 上に働くマクロ構造の変位場 $\boldsymbol{u}$ は Fig.2 を参照して以下のようになる．

$$\begin{cases} u_1(x_1,x_2,x_3) = \bar{u}_1(x_1,x_2) - x_3\phi_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2,x_3) = \bar{u}_2(x_1,x_2) - x_3\phi_2(x_1,x_2) \\ u_3(x_1,x_2) = \bar{u}_3(x_1,x_2) \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\bar{u}_i$ は中心面上の変位であり，ϕ_i は断面の回転角を表している．また，図中の N，M，V はそれぞれ板の断面に働く垂直合応力，曲げモーメント応力，面外せん断合応力である．式 (1) より，マクロひずみ $\boldsymbol{E}$ は以下のように表すことができる．

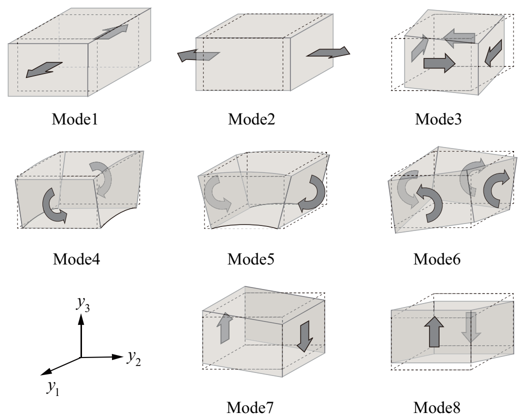

Fig. 3　Deformation modes imposed on unit cell with each macroscopic generalized strain

$$\begin{Bmatrix} E_{11}\\ E_{22}\\ E_{33}\\ 2E_{12}\\ 2E_{23}\\ 2E_{31}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} - x_3\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} - x_3 \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\\ 0 \\ \dfrac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - x_3\left(\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right)\\ \dfrac{\partial\bar{u}_3}{\partial x_2}-\phi_2\\ \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1}-\phi_1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\tilde{E}^1 + x_3\tilde{E}^4\\ \tilde{E}^2+x_3\tilde{E}^5\\ 0\\ \tilde{E}^3+x_3\tilde{E}^6\\ \tilde{E}^7\\ \tilde{E}^8\end{Bmatrix} \tag{2}$$

ここで，式中の $\tilde{\boldsymbol{E}}$ はマクロ一般化ひずみであり，

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{E}} &= \left\{\tilde{E}^1 \quad \tilde{E}^2 \quad \tilde{E}^3 \quad \tilde{E}^4 \quad \tilde{E}^5 \quad \tilde{E}^6 \quad \tilde{E}^7 \quad \tilde{E}^8\right\}^{\mathrm{T}} \\ &= \left\{ \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2} \quad -\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} \right. \\ &\qquad \left. -\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} \quad -\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right) \quad \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial x_2}-\phi_2 \quad \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial x_1}-\phi_1 \right\}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{3}$$

とおいた．これらの各マクロ一般化ひずみの変形図（マクロ変形モード）を Fig.3 に示す．

次に，ミクロひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は，次式のように表す．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{z}}\tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{u}^* \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{y})$ は非均質に起因するミクロ擾乱ひずみ，$\tilde{\boldsymbol{z}}$ はマクロ一般化ひずみとミクロひずみを結びつける行列であり，それぞれ次式のように定義した．

$$\boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{u}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_3}\\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_3} & \dfrac{\partial}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial y_3} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y_1}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^*\\ u_2^*\\ u_3^*\end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$\tilde{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_2/2 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{u}^*$ は y_1, y_2, y_3 の関数であり，面内ユニットセル内に周期的に分布するミクロ擾乱変位である．$\tilde{\boldsymbol{z}}$ の (5, 6) 成分，(6, 6) 成分に，$-z_1/2$，$-z_2/2$ が付加されているが，これらはユニットセルのマクロねじり変形を再現するために導入された成分である [12, 13]．このとき y_i と z_i という二つのミクロレベルの座標系を導入したが，y_i は均質化の過程で用いるものであり，z_i は板曲げ理論で用いる運動学的なパラメータである．また，マクロひずみ $\boldsymbol{E}$ とミクロひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は次式で関係づけられている [12]．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{l_1 l_2 h}\int_{-l_1/2}^{l_1/2}\int_{-l_2/2}^{l_2/2}\int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\varepsilon}\, dy_1 dy_2 dy_3 \\ &= \frac{1}{l_1 l_2 h}\int_{-l_1/2}^{l_1/2}\int_{-l_2/2}^{l_2/2}\int_{-h/2}^{h/2} \left(\tilde{\boldsymbol{z}}|_{(z_1,\ z_2)\to(y_1, y_2)}\tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{u}^*\right) dy_1 dy_2 dy_3 \\ &= \boldsymbol{z}\tilde{\boldsymbol{E}}\end{aligned} \tag{7}$$

以上のマクロおよびミクロひずみの定義を用いると，面内ユニットセルの支配方程式は次式のようになる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{\partial}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = 0\\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}\right)\\ \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{z}}\tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} = \alpha\Delta T\boldsymbol{\psi}\ ;\ \boldsymbol{\psi} = \left\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right\}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{u}^* : \text{In-plane Y-periodic}\end{cases} \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y})$ はミクロ応力，$\boldsymbol{w}$ はミクロ変位，$\boldsymbol{C}$ は構成材料の弾性係数行列であり，これらはすべて y_1, y_2, y_3 の関数である．また，$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}$ はミクロ熱膨張ひずみであり，その大きさは熱膨張係数 α と温度変化 ΔT の積で決定される．この支配方程式は，マクロ一般化ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}$ をデータとして，未知の擾乱変位 $\boldsymbol{u}^*$ について面内周期性の拘束条件下で解くべき問題となっている．なお，ここでは簡単のために等方的な熱膨張変形を仮定しているが，異方性を想定しても一般性は失われない．

一方，マクロ一般化応力 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ は，次式で定義される．

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{M}} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}|_{z_3\to y_3}\left(\frac{1}{l_1 l_2}\int_{-l_1/2}^{l_1/2}\int_{-l_2/2}^{l_2/2}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right)\mathrm{d}y_3 \\ &= \int \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}(z_3)\mathrm{d}z_3\end{aligned} \tag{9}$$

上式の $\boldsymbol{\Sigma}$ はマクロ応力であり，次式のような面内方向の平均化により定義される．

$$\boldsymbol{\Sigma}(z_3) = \frac{1}{A}\int_{-l_1/2}^{l_1/2}\int_{-l_2/2}^{l_2/2}\boldsymbol{\sigma}(y1,\ y2,\ z3)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \tag{10}$$

ここで，A は面内方向の断面積 $A = l_1 l_2$ であり，V は面内ユニットセルの体積である．また，ここで定義した $\boldsymbol{z}$

は上記で定義した $\tilde{z}$ と異なり，面内平均をとる仮定で $-z_1/2, -z_2/2$ の項が 0 となっている [12,13]．すなわち，

$$
\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}
$$

のように定義されている．式 (8) の第 2，3 式を式 (9) に代入すると，均質化板剛性を $\tilde{\boldsymbol{D}}$ として，次式のようなマクロ一般化応力 $\tilde{\boldsymbol{M}}$ とマクロ一般化ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}$ の関係式を導出することができる．

$$
\tilde{\boldsymbol{M}} = \tilde{\boldsymbol{D}}\left(\tilde{\boldsymbol{E}} - \Delta T \tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{th}}\right) \tag{12}
$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{th}}$ は単位温度変化あたりに生じるマクロ一般化熱ひずみであり，面内ユニットセルのトポロジーに応じて決定されるものである．均質化板剛性とマクロ一般化熱ひずみは，等方性材料の仮定を用いて扱われることが多いが，本研究では次式のように定義することで，完全異方的な挙動を許容するものとする．

$$
\tilde{\boldsymbol{D}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{K} \\ \hline \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{L} \\ \hline \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H} \end{array}\right]
= \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{31} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & K_{11} & K_{12} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & K_{21} & K_{22} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & K_{31} & K_{32} \\ \hline B_{11} & B_{21} & B_{31} & D_{11} & D_{12} & D_{31} & L_{11} & L_{12} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & D_{12} & D_{22} & D_{23} & L_{21} & L_{22} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{31} & D_{23} & D_{33} & L_{31} & L_{32} \\ \hline K_{11} & K_{21} & K_{31} & L_{11} & L_{21} & L_{31} & H_{11} & H_{12} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} & L_{12} & L_{22} & L_{32} & H_{12} & H_{22} \end{array}\right] \tag{13}
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{th}} = \left\{ \tilde{E}_1^{\mathrm{th}} \quad \tilde{E}_2^{\mathrm{th}} \quad \tilde{E}_3^{\mathrm{th}} \quad \tilde{E}_4^{\mathrm{th}} \quad \tilde{E}_5^{\mathrm{th}} \quad \tilde{E}_6^{\mathrm{th}} \quad \tilde{E}_7^{\mathrm{th}} \quad \tilde{E}_8^{\mathrm{th}} \right\}^{\mathrm{T}} \tag{14}
$$

また，本研究では熱伝導解析は行わず常に一様温度を与えることとし，式 (8) の第 4 式で用いた温度変化 ΔT をそのままマクロ構造にも適用する．なお，式 (12) はマクロ一般化熱応力 $\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{th}}$ を用いて次式のように表すことができる．

$$
\tilde{\boldsymbol{M}} = \tilde{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{E}} - \Delta T \tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{th}} \tag{15}
$$

ここで，マクロ一般化熱応力は，$\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{th}} = \tilde{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{th}}$ と定義した．なおこの構成関係は，マクロ材料特性を定義することなく，マクロ変形特性の異方性や面内および面外変形の連成作用を表現していることに注意されたい．

本研究では，面内ユニットセルに数値平板試験 [12,13] を行うことにより，均質化板剛性 $\tilde{\boldsymbol{D}}$，並びにマクロ一般化熱応力 $\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{th}}$ を算出する．詳しくは付録 A，あるいは文献 [12,13] を参照されたい..

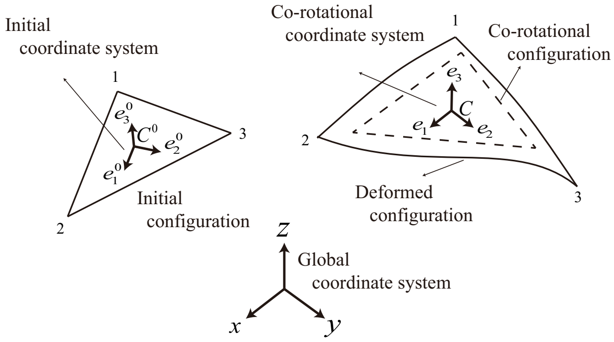

Fig. 4　Configurations and coordinate systems in co-rotational formulation

3. 共回転理論に基づくマクロ構造解析手法

本章では，マクロ構造に対して大変位・大回転問題を取り扱うための，Felippa ら [18] が提案した共回転理論と，第 2 章で導出した均質化板剛性と一般化熱応力の適用法について解説する．共回転理論は第 1 章で触れたように，物体の全運動を剛体運動と弾性変形と分けて考え，弾性変形による変位，回転量を用いてひずみ，応力を計算し，つり合い条件を満たす手法である．そのため，各物理量について，全運動による値と，剛体運動にのみ，あるいは弾性変形にのみ依存する値との関係を把握することが必要となる．そこで以下では，まず Felippa ら [18] の方法に倣い，全運動を剛体運動と弾性変形に分解するため配置と座標系を設定し，物理量同士の関係を示す．次に，均質化板剛性を用いて内力ベクトルを導出する方法について述べる．なお，本研究の定式化では直交座標系を採用する．

3.1　配置と座標系の設定　　共回転理論では変形を記述する際に，初期配置（initial configuration），共回転配置（co-rotaitonal configuration），現在配置（deformed configuration）の 3 つの配置を定義する（Fig.4）．初期配置は運動する前の配置であり，現在配置は運動後の配置である．共回転配置は，これら二つの中間に位置し，全運動のうち剛体運動のみ生じさせた仮想的な配置である．共回転配置から現在配置までの変動が弾性変形により生じたものと認識することができる．また，全体座標系のほかに，初期配置，共回転配置についてそれぞれ局所座標系を設ける（Fig.4）．これらの局所座標系を設定し，共回転配置と現在配置を同じ局所座標系で議論することで，物体の全運動から剛体運動による影響を取り除くことができる．

各座標系の設定の仕方はさまざまであり，要素形状によっても変化するが [22]，ここでは本研究で採用した 3 節点 3 角形要素に限定し議論を進めることにする．初期配置における局所座標系（以降，初期座標系）の原点を C^0，またその座標値を $\boldsymbol{x}_{C0}^{0}$ とし，各初期座標軸

の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1^0$，$\boldsymbol{e}_2^0$，$\boldsymbol{e}_3^0$ とする．まず，原点 C^0 を各有限要素の重心に設定し，一つ目の基底 $\boldsymbol{e}_1^0$ を有限要素の任意の 1 辺と平行になるように設定する．次に要素の面に対して垂直になるよう $\boldsymbol{e}_3^0$ を設定し，最後の $\boldsymbol{e}_2^0$ については既に定義した 2 軸と垂直に交わるよう定義すれば，すべての座標軸が得られる．これらを数式で表すと次式のようになる

$$\boldsymbol{x}_{C^0}^0 = \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{3}\boldsymbol{x}_a^0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{e}_1^0 = \frac{\boldsymbol{x}_{21}^0}{\|\boldsymbol{x}_{21}^0\|},\ \boldsymbol{e}_3^0 = \frac{\boldsymbol{x}_{21}^0 \times \boldsymbol{x}_{31}^0}{\|\boldsymbol{x}_{21}^0 \times \boldsymbol{x}_{31}^0\|},\ \boldsymbol{e}_2^0 = \boldsymbol{e}_3^0 \times \boldsymbol{e}_1^0 \tag{17}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_{21}^0 = \boldsymbol{x}_2^0 - \boldsymbol{x}_1^0$ であり，$\boldsymbol{x}_a^0$，$(a = 1, 2, 3)$ は，各節点の全体座標系における座標値であり，a は各要素ごとに設定される要素番号である（Fig.4 中の 1, 2, 3 に該当）．また，全体座標系から初期座標系への回転行列 $\boldsymbol{T}_0$ は

$$\boldsymbol{T}_0 = [\boldsymbol{e}_1^0\ \boldsymbol{e}_2^0\ \boldsymbol{e}_3^0]^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

のようになる．共回転配置における局所座標系（以後，共回転座標系）については，変形後の各節点座標値 $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{x}_a^0 + \boldsymbol{u}_a$, $(a = 1, 2, 3)$ を用いて，同様の手順で原点 C とその座標値 $\boldsymbol{x}_C$，各座標軸 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ ならびに，回転行列 $\boldsymbol{T}$ を設定する．

最後に本章で用いる各変数の表記法についてまとめておく．各座標系に関する変数（例として $\boldsymbol{x}$ を取り上げる）について，$\overline{\boldsymbol{x}}$ のように上線をつけたものは局所座標系での値であり，上線のついていないものは全体座標系の値である．また，変数につける上付き文字には，0，R，e の 3 つがあり，$\boldsymbol{x}^0$ は変形前の変数を，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{R}}$ は剛体運動（局所座標系の回転）のみの影響を考慮した変数を，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{e}}$ は弾性変形のみの影響を考慮した変数を表している．これらに対して特に上付き文字のない $\boldsymbol{x}$ は，全運動後の変数を表している．ここで，局所座標系には 2 種類設定したが，$\overline{\boldsymbol{x}}^0$ は初期座標系，$\overline{\boldsymbol{x}}$，$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{R}}$，$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{e}}$ は共回転座標系により表した変数である．さらに，本章ではマクロスケールに絞って議論を展開するため，2 章で定義したミクロ座標系 $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ は用いない．なお，変位場については第 2 章で用いたミクロ変位場 $\boldsymbol{u}$ と同じ表記を用いているが，ここでの $\boldsymbol{u}$ はマクロ変位場であることに注意されたい．

3.2　各配置の自由度と各変数の変分　　本節では，各配置にて定義される節点変位と回転について説明し，それらの変分をとることで各変数の微小増分量の関係式を示す．具体的には，全体座標系で定義される全節点変位，回転と，共回転座標系で定義される弾性変形のみにより生じる全節点変位，回転との関係を示すことを目標とする．まず，全体座標系における弾性変形に起因する変位 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}}$ の定義を記す．

$$\boldsymbol{u}_a^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_a^{\mathrm{R}} = \left(\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{x}_a^0\right) - \left(\boldsymbol{x}_{C^0}^0 + \boldsymbol{u}_C + \boldsymbol{x}_{aC}^{\mathrm{R}}\right) \tag{19}$$

また，変位 $\boldsymbol{u}_a^{\mathrm{e}}$ を図示したものを Fig.5 に示す．ここで，$\boldsymbol{u}_C$

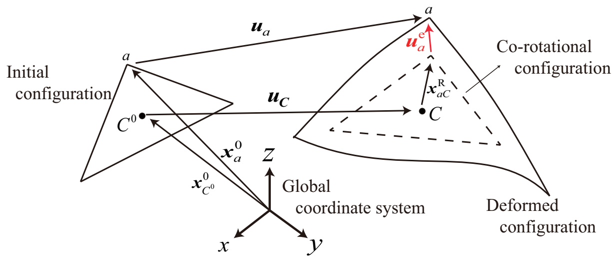

Fig. 5　Illustration of elastic displacement $\boldsymbol{u}^{\mathrm{e}}$

は C^0 から C までの変位を表しており，また $\boldsymbol{x}_{aC}^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{x}_a^{\mathrm{R}} - \boldsymbol{x}_C$ である．上式は全運動後の節点座標 $\boldsymbol{x}_a$ から，剛体運動の影響のみを受ける節点座標 $\boldsymbol{x}_a^{\mathrm{R}}$ を差し引くことで，弾性変形による変位を導出している．共回転座標系における弾性変形変位 $\overline{\boldsymbol{u}}_a^{\mathrm{e}}$ は，次式のようになる．

$$\overline{\boldsymbol{u}}_a^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_a^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{x}_a^0 - \boldsymbol{x}_{C^0}^0 - \boldsymbol{u}_C\right) - \overline{\boldsymbol{x}}_{aC^0}^0 \tag{20}$$

ここで，上式の右辺第 2 項は，局所座標系における座標値は剛体回転によって変化しないことを表す次式を用いて導出した．

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{aC^0}^0 = \overline{\boldsymbol{x}}_{aC^0}^{\mathrm{R}} \tag{21}$$

次に回転自由度についての関係を示す．まず，各節点 a ごとに定義される全回転行列 $\boldsymbol{R}_a$ と共回転座標系における弾性変形に起因する回転行列 $\boldsymbol{R}_a^{\mathrm{e}}$ との関係を次式のように表す．

$$\boldsymbol{R}_a^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{R}_a\boldsymbol{R}^{0\mathrm{T}} \tag{22}$$

上式は，全回転行列 $\boldsymbol{R}_a$ から剛体回転による回転行列 $\boldsymbol{R}^0$ の逆行列を乗ずることで弾性変形による回転行列を導出している．共回転座標系では次式のように表される．

$$\overline{\boldsymbol{R}}_a^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{R}_a^{\mathrm{e}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{T}^{0\mathrm{T}} \tag{23}$$

ここの式展開では式 (22) と，3.1 節で定義した $\boldsymbol{T}^0$ と $\boldsymbol{T}$ の関係を表す次式を用いて導出した．

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^0\boldsymbol{R}^{0\mathrm{T}} \tag{24}$$

一方，回転自由度をベクトル表記にするために，回転行列 $\boldsymbol{R}$ について以下の擬ベクトルを用いる．

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\theta}{2\sin\theta}\boldsymbol{N} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{N} = \{R_{(3,2)} - R_{(2,3)}\ R_{(1,3)} - R_{(3,1)}\ R_{(2,1)} - R_{(1,2)}\} \tag{26}$$

$$\theta = \|\boldsymbol{N}\| \tag{27}$$

上記の (3, 2) などの数字は行列の成分を表している。これを $\overline{\boldsymbol{R}}_a^{\mathrm{e}}$ にも適用させることで，弾性変形による回転行列の擬ベクトル $\overline{\boldsymbol{\theta}}_a^{\mathrm{e}}$ を導出することができる．

本研究では，3 次元の有限回転問題も解析対象となるため，回転自由度の更新の際には回転擬ベクトルを加算的に用いることはできない．そこで，3 次元微小

増分回転ベクトル $\delta\omega_a^{\mathrm{e}}$ を用いることで次式のように回転行列を更新する [17].

$$\boldsymbol{R}_{a,\,\mathrm{new}} = \boldsymbol{R}(\delta\omega_a^{\mathrm{e}})\boldsymbol{R}_{a,\,\mathrm{old}} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{R}(\delta\omega_a^{\mathrm{e}}) = \boldsymbol{I} + \frac{\sin(\delta\omega_a^{\mathrm{e}})}{\delta\omega_a^{\mathrm{e}}}\mathrm{spin}(\delta\omega_a^{\mathrm{e}}) + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\delta\omega_a^{\mathrm{e}}/2)}{\delta\omega_a^{\mathrm{e}}}\mathrm{spin}(\delta\omega_a^{\mathrm{e}})^2\right] \tag{29}$$

$$\delta\omega_a^{\mathrm{e}} = \|\delta\omega_a^{\mathrm{e}}\| \tag{30}$$

ここで，この3次元微小増分回転ベクトル $\delta\overline{\boldsymbol{\omega}}_a^{\mathrm{e}}$ は，回転行列の擬ベクトルの増分 $\delta\overline{\boldsymbol{\theta}}$ と次式の関係にある [17,21].

$$\delta\overline{\boldsymbol{\theta}}_a^{\mathrm{e}} = \overline{\boldsymbol{H}}_a(\overline{\boldsymbol{\theta}}_a^{\mathrm{e}})\delta\overline{\boldsymbol{\omega}}_a^{\mathrm{e}} \tag{31}$$

$$\overline{\boldsymbol{H}}_a(\overline{\boldsymbol{\theta}}_a^{\mathrm{e}}) = \boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\mathrm{spin}(\overline{\boldsymbol{\theta}}_a^{\mathrm{e}}) + \eta\,\mathrm{spin}(\overline{\boldsymbol{\theta}}_a^{\mathrm{e}})^2 \tag{32}$$

ここで，上式の η は次式のように求める.

$$\eta = \frac{1 - \frac{1}{2}\overline{\theta}_a^{\mathrm{e}}\cot\frac{1}{2}\overline{\theta}_a^{\mathrm{e}}}{\overline{\theta}_a^{\mathrm{e}\,2}} \simeq \frac{1}{12} + \frac{1}{720}\overline{\theta}_a^{\mathrm{e}\,2} \tag{33}$$

$$\overline{\theta}_a^{\mathrm{e}} = \left\|\overline{\boldsymbol{\theta}}_a^{\mathrm{e}}\right\| \tag{34}$$

また，spin($\boldsymbol{a}$) は，あるベクトル $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ に対して次のような成分を有する行列である.

$$\mathrm{spin}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

最後に，共回転座標系における弾性変形に関する変位・回転自由度を含む一般化変位ベクトル微小増分 $\delta\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}} = \{\delta\overline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{e}}, \delta\overline{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{e}}\}$ と全体座標系の全一般化変位ベクトル微小増分 $\delta\boldsymbol{d} = \{\delta\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{\theta}\}$ は，

$$\delta\overline{\boldsymbol{p}}_a^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\Lambda}\delta\boldsymbol{d} \tag{36}$$

のように表すことができる．この行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ については付録 B.1 を参照されたい.

3.3　均質化板剛性を用いた内力ベクトルの設定　本研究で対象とする材料には，局所座標系において微小ひずみ理論の枠組みで線形弾性体を仮定する．このとき，3.1 節で各要素ごとに設定した共回転座標系を面内ユニットセルの支配方程式の記述に用いると，一般に面内周期性の定義との不整合を生じる（Fig.6）．そのため，Fig.6 に示すように，運動前のマクロ構造要素について初期座標系のほかに面内周期性と整合し，均質化板剛性を適用できるような座標系（初期ユニットセル座標系）を設定する．この初期ユニットセル座標系の座標軸 $\tilde{\boldsymbol{e}}_1^0, \tilde{\boldsymbol{e}}_2^0, \tilde{\boldsymbol{e}}_3^0$，およびその回転行列 $\tilde{\boldsymbol{T}}^0 = [\tilde{\boldsymbol{e}}_1^0\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2^0\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3^0]^{\mathrm{T}}$ は，マクロ構造の初期形状を平板として扱う場合には全体座標系の原点を C^0 に水平移動させた座標軸を採用することで上記条件を満たすことができる．この初期ユニットセル座標系を剛体回転させた座標系（ユニットセル座標系）への回転行列 $\tilde{\boldsymbol{T}} = [\tilde{\boldsymbol{e}}_1\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3]^{\mathrm{T}}$ は式 (24) と同様に次式で定義される.

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \tilde{\boldsymbol{T}}^0\boldsymbol{R}^{0\mathrm{T}} \tag{37}$$

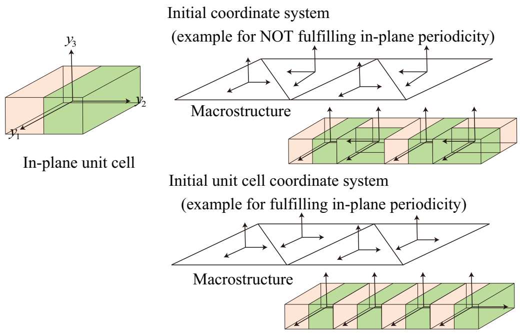

Fig. 6　Setting for unit cell coordinate system

また，共回転座標系における独立変数 $\overline{\boldsymbol{x}}$ と，ユニットセル座標系における独立変数 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の関係は，変位に依存しない回転行列 $\tilde{\boldsymbol{R}}^0$ を用いて次式のように表すことができる.

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{R}}^0\overline{\boldsymbol{x}} \tag{38}$$

$$\tilde{\boldsymbol{R}}^0 = \tilde{\boldsymbol{T}}^0\boldsymbol{T}^{0\mathrm{T}} \tag{39}$$

次に，ユニットセル座標系にて内力ベクトルは次式のように計算される.

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \tilde{\boldsymbol{k}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}} - \tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{th}} \tag{40}$$

この式中の要素剛性行列 $\tilde{\boldsymbol{k}}$ は均質化板剛性 $\tilde{\boldsymbol{D}}$ を用いて，

$$\tilde{\boldsymbol{k}} = \int \tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{B}}\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{ele}} \tag{41}$$

と表される．ここで，$\tilde{\boldsymbol{B}}$ は，ユニットセル座標系における弾性変形に起因する変位・回転自由度 $\tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}}$ とマクロ一般化ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}$ を結びつける変換行列であり，$\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}}$ となる．また，Ω_{ele} は各マクロ構造要素の全領域を指している．加えて式 (40) の $\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{th}}$ は，マクロ一般化熱応力を用いて次式のように定義した.

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{th}} = \int \tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{th}}\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{ele}} \tag{42}$$

さらに，式 (40) は次式のように共回転座標系における内力ベクトルに書き換えることができる.

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{f}} &= \tilde{\boldsymbol{R}}_{(6)}{}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{f}} = \tilde{\boldsymbol{R}}_{(6)}{}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{k}}\tilde{\boldsymbol{R}}_{(6)}\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}} - \tilde{\boldsymbol{R}}_{(6)}{}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{th}} \\ &= \overline{\boldsymbol{k}}\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}} - \overline{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{th}}\end{aligned} \tag{43}$$

ここで，$\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}} = \{\overline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{e}}, \overline{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{e}}\}$ は共回転座標系における弾性変形に起因する変位・回転自由度であり，前節で導出した．また，$\tilde{\boldsymbol{R}}_{(6)} = \mathrm{diag}\left[\tilde{\boldsymbol{R}}_0\ \tilde{\boldsymbol{R}}_0\ \tilde{\boldsymbol{R}}_0\ \tilde{\boldsymbol{R}}_0\ \tilde{\boldsymbol{R}}_0\ \tilde{\boldsymbol{R}}_0\right]$ と定義している．最後に，$\overline{\boldsymbol{k}}$ は次式のように定義した.

$$\overline{\boldsymbol{k}} = \int \tilde{\boldsymbol{R}}_{(6)}{}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{R}}_{(6)}\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{ele}} = \int \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{B}}\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{ele}} \tag{44}$$

ここで，$\overline{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{R}}_{(6)}$ である.

上記の共回転座標系での内力ベクトルを全体座標系で表すために，次の関係式を用いる.

$$\delta\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} = \delta\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{eT}}\overline{\boldsymbol{f}} \tag{45}$$

この式は，全体座標系の仮想仕事と共回転座標系の仮想仕事が等しいことを示している．式 (36) より，上式の右辺を展開すると，

$$\delta\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{eT}}\overline{\boldsymbol{f}} = \delta\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}} \tag{46}$$

となり，

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}} \tag{47}$$

なる関係式が導かれる．

最後に，この内力ベクトルについて変分をとると，次式のようになる．

$$\delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d} \tag{48}$$

本式中の要素ごとに定義される接線剛性行列 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}$ については付録 B.2 を参照されたい。

4. マルチスケールトポロジー最適化

本章では，最適化計算における設計変数の設定とその設計変数を用いて表される面内ユニットセルの有効弾性係数について説明した後，変位量制御問題における目的関数と制約条件式を設定する．また，本研究では感度解析に基づく最適化アルゴリズムを適用するため，各目的関数についての解析的感度を導出し，その検証を行う．

4.1 設計変数および有効弾性係数の設定 設計領域となる面内ユニットセルは 2 種数の線形弾性材料からなる複合構造とし，その有限要素モデルの各要素におけるどちらか一つの材料の体積分率を設計変数とする．この設計変数を $0 \leq s_i \leq 1$ の範囲で変化させることで，面内ユニットセルの材料配置を決定することにする．

熱変形を考慮する場合は，ヤング率だけでなく熱膨張係数も設計変数に依存する．本研究では，熱膨張係数 α とヤング率 E を乗じた熱応力係数 $\beta\,(=\alpha E)$ [23] を導入し，この係数について設計変数を用いて内挿する．まず式 (8) 第 2 式で与えたミクロ応力の式について次式のように展開する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}\right) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} \\ &= E\overline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{\varepsilon} - \beta\overline{\boldsymbol{C}}\Delta T\boldsymbol{\psi}\end{aligned} \tag{49}$$

ここで，$\overline{\boldsymbol{C}}$ は弾性係数行列のヤング率に依存しない項である．この熱応力係数は，設計変数 s_i を用いて RAMP 法 [23,24] により次式のように内挿する。

$$E(s_i) = \left(1 - \frac{s_i}{1 + q_E(1 - s_i)}\right)E_1 + \left(\frac{s_i}{1 + q_E(1 - s_i)}\right)E_2 \tag{50}$$

$$\beta(s_i) = \left(1 - \frac{s_i}{1 + q_\beta(1 - s_i)}\right)\beta_1 + \left(\frac{s_i}{1 + q_\beta(1 - s_i)}\right)\beta_2 \tag{51}$$

詳細については文献 [23] を参照されたい．

4.2 変位量制御問題の設定 温度変化が生じたときのマクロの変形を制御するために，指定した節点の変位量最大化問題を考える．指定する節点番号を k としたときの，目的関数，制約条件を以下のように設定する．

$$\min\ f(s_i) = f_k U_k \tag{52}$$

$$\text{subject to}\ h(s_i) = \left(\int_V s_i \mathrm{d}V - V_0\right)^2 - \delta_0 < 0 \tag{53}$$

ここで，U^k は指定した節点自由度の箇所だけ値を持つ仮想荷重ベクトル $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}$ と各要素ごとに設定される非ゼロの仮想荷重係数 f_k^{v} を用いて以下のように表す.

$$f_k^{\mathrm{v}} U_k = \boldsymbol{F}^{\mathrm{vT}}\boldsymbol{U} \tag{54}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}} = (f_1^{\mathrm{v}}, f_2^{\mathrm{v}}, \cdots, f_k^{\mathrm{v}}, f_{k+1}^{\mathrm{v}}, \cdots)^{\mathrm{T}} = (0, 0, \cdots, f_k^{\mathrm{v}}, 0, \cdots)^{\mathrm{T}} \tag{55}$$

$$\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, \cdots, U_k, U_{k+1}, \cdots)^{\mathrm{T}} \tag{56}$$

上記の仮想荷重ベクトル $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}$ と節点変位ベクトル $\boldsymbol{U}$ の内積をとることで，任意節点の変位量のみを抽出することができる．また，指定する節点は複数選ぶこともでき，その場合には節点に応じて荷重係数の絶対値の値を分布させることも可能であるが，本解析では $f_k^{\mathrm{v}} = 1$ に固定する．最後に，制約条件式 (53) は，ある微小値 δ_0 を用いて，体積一定条件と等価な不等式制約条件式を与えている．ここで，V は面内ユニットセルの全体積，V_0 は初期の面内ユニットセルの phase-2 の体積である．

次に，目的関数の解析的感度を随伴法を用いて導出するために，つり合い点の残差ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{int}} = 0$ と随伴ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて，随伴関数を次式のようにおく．

$$f^*(s_i) = \boldsymbol{F}^{\mathrm{vT}}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{57}$$

ここで，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{int}}$ は全体内力ベクトルであり，式 (47) で定義した $\boldsymbol{f}$ を全マクロ構造要素についてアセンブリすることで得られる．また，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ は全体外力ベクトルである．

式 (57) の設計変数 s_i についての導関数は次式のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^*(s_i)}{\partial s_i} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{\mathrm{vT}}}{\mathrm{d}s_i}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{vT}}\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial s_i} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s_i} \\ &= \boldsymbol{F}^{\mathrm{vT}}\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial s_i} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{U}}\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial s_i} + \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s_i}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{vT}} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}\right)\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial s_i} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s_i}\end{aligned} \tag{58}$$

ここで，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$ は式 (48)，(123) で定義した要素ごとの接線剛性行列を全体系にアセンブリしたものである．また，随伴ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ は任意であるため，下記の関係を満たすように設定する．

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{59}$$

そして，最終的に式 (58) は次式のようになる．

$$\frac{\partial f^*(s_i)}{\partial s_i} = -\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s_i} \tag{60}$$

ここで，$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s_i}$ のうち，設計変数 s_i に陽的に依存する項は対応する要素の均質化板剛性とマクロ一般化熱応力

のみであるため，式 (43) と式 (47) を用いて次式のように導出される．

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s_i} = \frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{int}}}{\partial s_i} = \int \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial s_i} d\Omega$$
$$= \int \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{D}}}{\partial s_i} \overline{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}} - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{th}}}{\partial s_i} \right) d\Omega \tag{61}$$

上式の $\boldsymbol{\Lambda}$ は，付録 B の式 (109) で定義される行列である．また，$\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}}$ は前章で定義した局所座標系における弾性変形に起因する変位と回転の自由度である．

最後に，Kato ら [16] の文献を参考にこの式中の均質化板剛性の解析的感度を導出する．α 成分あるいは β 成分にだけ 1 で，他の成分が 0 であるような単位マクロ一般化ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}^{(\alpha)}$，$\tilde{\boldsymbol{E}}^{(\beta)}$ を用いて，$\tilde{\boldsymbol{D}}$ の（α,β）成分を次式のように表す．

$$\tilde{D}_{\alpha\beta}(s_i) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{(\alpha)}\right)^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{D}} \tilde{\boldsymbol{E}}^{(\beta)} = \frac{1}{A} \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{(\alpha)}\right)^{\mathrm{T}} \int_V \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}^{(\beta)} \mathrm{d}V$$
$$= \frac{1}{A} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)} - \boldsymbol{\partial}_y \boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}^{(\beta)} \mathrm{d}V = \frac{1}{A} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} \mathrm{d}V \tag{62}$$

上式の式展開では，面内ユニットセルの支配方程式 (8) の第 3 式を用いている．また，第 3 等式から第 4 等式までの式展開では，式 (8) の第 1 式とミクロ表面上（Fig.16 中の $\partial Y_{[1]}$，$\partial Y_{[2]}$）の応力ベクトルの反対称性より，$\int_V \boldsymbol{\partial}_y \boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}^{(\beta)} \mathrm{d}V = 0$ なる関係が得られることから導出した．式 (62) の $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)}$ はそれぞれ，ユニットセルに対し，$\Delta T = 0$ 下で上記単位マクロ一般化ひずみ $\boldsymbol{E}^{(\alpha)}$，$\boldsymbol{E}^{(\beta)}$ を与えて数値平板試験を行うことにより求められるミクロひずみである．上の関係式より，$\partial \tilde{\boldsymbol{D}}(s_i)/\partial s_i$ の（α,β）成分は次式のようになる．

$$\frac{\partial \tilde{D}_{\alpha\beta}(s_i)}{\partial s_i} = \frac{1}{A} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial s_i} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} \mathrm{d}V$$
$$+ \frac{1}{A} \int_V \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}}{\partial s_i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} \mathrm{d}V + \frac{1}{A} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)}}{\partial s_i} \mathrm{d}V$$
$$= \frac{1}{A} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial s_i} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} \mathrm{d}V \tag{63}$$

上式の式展開では，$\dfrac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial s_i}$ が面内周期境界条件を満たすことから，式 (62) と同様の操作で導出した．最終的に，有効弾性係数に関する式 (49) を用いて，$\tilde{\boldsymbol{D}}$ の s_i に関する感度の陽的表現は次式のようになる．

$$\frac{\partial \tilde{D}_{\alpha\beta}(s_i)}{\partial s_i} = \frac{1}{A} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)T} \frac{\partial E}{\partial s_i} \overline{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} dV \tag{64}$$

次に，一般化熱応力の解析的感度を導出する．まず，$\tilde{\boldsymbol{M}}$ の α 成分は，上述の単位マクロ一般化ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}^{(\alpha)}$ を用いて，次式のように表すことができる．

$$\tilde{M}_{\alpha}(s_i) = \left(\tilde{\boldsymbol{E}}^{(\alpha)}\right)^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{M}}$$
$$= \frac{1}{A} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{th})} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}\right) \mathrm{d}V \tag{65}$$

ここで，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{th})}$ は一般化熱応力を算定する数値平板試験により生じるミクロひずみであり，熱膨張ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}$ とは異なることに注意されたい．上の関係式より，$\partial \tilde{\boldsymbol{M}}(s_i)/\partial s_i$ の α 成分は以下のようになる．

Table 1　Material parameter for sensitivity analysis

	Young's modulus E [N/mm^2]	Thermal expansion coefficient α[1/℃]
phase-1	1.0×10^4	1.0×10^{-4}
phase-2	1.0×10^5	5.0×10^{-6}

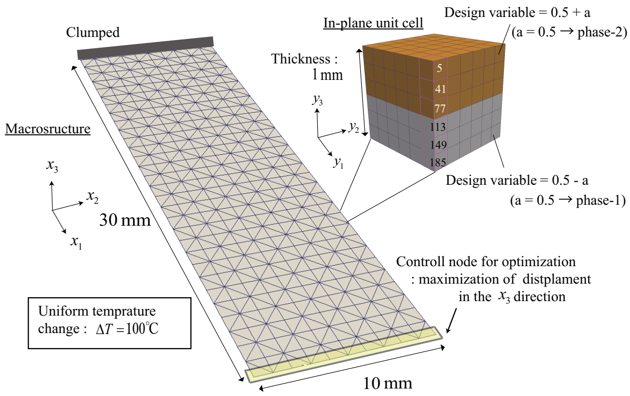

Fig. 7　Finite element mesh of macroscopic plate and in-plane unit cell for verification of sensitivity analysis

$$\frac{\partial \tilde{M}_{\alpha}(s_i)}{\partial s_i} = \frac{1}{A} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)\mathrm{T}} \left(\frac{\partial E}{\partial s_i} \overline{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\mathrm{th})} - \frac{\partial \beta}{\partial s_i} \overline{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{\psi} \right) \mathrm{d}V \tag{66}$$

最後に，制約条件式についての感度は次式のようになる．

$$\frac{\partial h(s_i)}{\partial s_i} = 2\,(V - V_0)\,v_i \tag{67}$$

ここで，v_i は面内ユニットセルの各有限要素の体積である．

4.3　感度解析の精度検証　本節では，導出した均質化板剛性と一般化熱応力ならびに目的関数の解析的感度について，計算コストは大きいが信頼性の高い数値微分（有限差分）により得た結果と比較することで検証する．

4.3.1　**数値微分と誤差の定義**　数値微分による目的関数と均質化板剛性の感度を，次の前進差分近似で定義する．

$$\frac{\Delta \tilde{D}_{\alpha\beta}}{\Delta s_i} = \frac{\tilde{D}_{\alpha\beta}(s_i + \Delta s_i) - \tilde{D}_{\alpha\beta}(s_i)}{\Delta s_i} \tag{68}$$

$$\frac{\Delta \tilde{M}^{\mathrm{th}}_{\alpha\beta}}{\Delta s_i} = \frac{\tilde{M}^{\mathrm{th}}_{\alpha\beta}(s_i + \Delta s_i) - \tilde{M}^{\mathrm{th}}_{\alpha\beta}(s_i)}{\Delta s_i} \tag{69}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta s_i} = \frac{f(s_i + \Delta s_i) - f(s_i)}{\Delta s_i} \tag{70}$$

Table 2　Accuracy of sensitivities for homogenized plate stiffness

$\tilde{D}_{\alpha,\beta}$	$\Delta\tilde{\boldsymbol{D}}/\Delta s_i$	$\partial\tilde{\boldsymbol{D}}/\partial s_i$	Error(%)
$A_{1,1}$ [N/mm]	1.271887×10^{3}	1.271886×10^{3}	9.42×10^{-7}
$A_{1,2}$ [N/mm]	3.815681×10^{2}	3.815653×10^{2}	7.35×10^{-6}
$A_{2,2}$ [N/mm]	1.271887×10^{3}	1.271883×10^{3}	3.16×10^{-6}
$A_{3,3}$ [N/mm]	4.451594×10^{2}	4.451601×10^{2}	1.74×10^{-6}
$B_{1,1}$ [N]	5.299526×10^{2}	5.299542×10^{2}	2.94×10^{-6}
$B_{1,2}$ [N]	1.589867×10^{2}	1.589855×10^{2}	7.21×10^{-6}
$B_{2,2}$ [N]	5.299526×10^{2}	5.299474×10^{2}	9.89×10^{-6}
$B_{3,3}$ [N]	1.854830×10^{2}	1.854834×10^{2}	2.12×10^{-6}
$D_{1,1}$ [N·mm]	2.254513×10^{2}	2.254506×10^{2}	2.94×10^{-5}
$D_{1,2}$ [N·mm]	6.779083×10^{1}	6.778963×10^{1}	1.77×10^{-5}
$D_{2,2}$ [N·mm]	2.254513×10^{2}	2.254483×10^{2}	1.32×10^{-5}
$D_{3,3}$ [N·mm]	7.831502×10^{1}	7.831504×10^{1}	3.51×10^{-7}
$H_{1,1}$ [N/mm]	7.208071×10^{0}	7.207928×10^{0}	1.99×10^{-5}
$H_{2,2}$ [N/mm]	7.208071×10^{0}	7.208195×10^{0}	1.72×10^{-5}

Table 3　Accuracy of sensitivities for generalized thermal stress

	$\Delta\tilde{\boldsymbol{M}}^{\rm th}/\Delta s_i$ ($\times10^3$)	$\partial\tilde{\boldsymbol{M}}^{\rm th}/\partial s_i$ ($\times10^3$)	Error(%)
$\tilde{M}_1^{\rm th}$[N/mm]	−3.306898	−3.306898	4.24×10^{-6}
$\tilde{M}_2^{\rm th}$[N/mm]	−3.306898	−3.306903	1.45×10^{-4}
$\tilde{M}_4^{\rm th}$[N]	−1.377873	−1.377874	1.24×10^{-5}
$\tilde{M}_5^{\rm th}$[N]	−1.377873	−1.377873	2.98×10^{-5}

ここで，Δs_i は設計変数の有限微小増分量であり，$\Delta s_i = 1.0\times10^{-7}$ を与える．また，検証結果を記載した表中の各成分ごとの Error は次式のように算出した．

$$\mathrm{Error}(\%) = \left|\frac{\partial\tilde{D}_{\alpha\beta}/\partial s_i - \Delta\tilde{D}_{\alpha\beta}/\Delta s_i}{\Delta\tilde{D}_{\alpha\beta}/\Delta s_i}\right|\times100 \tag{71}$$

$$\mathrm{Error}(\%) = \left|\frac{\partial\tilde{M}_\alpha^{\rm th}/\partial s_i - \Delta\tilde{M}_\alpha^{\rm th}/\Delta s_i}{\Delta\tilde{M}_\alpha^{\rm th}/\Delta s_i}\right|\times100 \tag{72}$$

4.3.2　均質化板剛性と一般化熱応力の感度検証解析

まず，均質化板剛性の感度の検証に用いた材料パラメータを Table1 に示す．Table1 には載せなかったが，ポアソン比，体積分率は両材料とも 0.3，50%で固定している．次に，感度解析の検証に用いたマクロ構造，面内ユニットセルを Fig.7 に示す．このマクロ構造の矩形面の 1 辺を完全拘束し，構造全体に一様に温度変化 $\Delta T = 100$ ℃を与える条件下で端部の変位量を最大化させる問題を考える．また，Fig.7 中の a を $0 < a < 0.5$ の範囲で変化させ設計変数を板厚方向に分布させることで，温度変化による曲げ変形を生じさせることができる．なお，本節では Fig.7 中の設計変数に関するパラメータ a を $a = 0.4$ として 1 ケースのみ解析を行った．

均質化板剛性の検証の結果を Table2 に，マクロ一般化熱応力の検証の結果を Table3 に示す．誤差はいずれの成分も 10^{-3}%以下に抑えられており，高い精度で感度が得られることが確認できる．

4.3.3　目的関数の感度検証解析　次に，前項の感度の検証に用いた解析条件を用いて，目的関数の感度について検証する．ここでの幾何学的非線形解析では，変位量の大きさに応じて感度の精度が変化することが考えられるため，Fig.7 中の a を $a = 0.4$ と $a = 0.1$ の 2 ケースについて検討した．これらの荷重を用いたときのマクロ構造の x_3 方向最大変位量は，それぞれ $u_{3\max} = -4.43$mm，$u_{3\max} = -1.33$mm となり，異なる変位量を与えている．面内ユニットセルのメッシュ図および，感度の検証を行う要素箇所と要素番号は Fig.7 に示したものを用いている．

各荷重パラメータに対して得られた感度の値を Table4，Table5 にそれぞれ示す．変位量が大きくなるにつれて誤差が大きくなる結果が得られているが，最大でも 10^{-1}% の誤差に抑えられることが確認できる．

Table 4　Accuracy of sensitivities for objective function (a = 0.4)

要素 i	$\Delta f/\Delta s_i$	$\partial f/\partial s_i$	Error(%)
5	-8.48639×10^{-4}	-8.48851×10^{-4}	2.50×10^{-2}
41	-7.35233×10^{-3}	-7.36093×10^{-3}	1.17×10^{-1}
77	1.99233×10^{-2}	1.99582×10^{-2}	1.75×10^{-1}
113	7.24062×10^{-3}	7.25253×10^{-3}	1.64×10^{-1}
149	1.38430×10^{-2}	1.38657×10^{-2}	1.64×10^{-1}
185	2.20563×10^{-2}	2.20923×10^{-2}	1.63×10^{-1}

Table 5　Accuracy of sensitivities for objective function (a = 0.1)

要素 i	$\Delta f/\Delta s_i$	$\partial f/\partial s_i$	Error(%)
5	-7.43079×10^{-2}	-7.43158×10^{-2}	1.07×10^{-2}
41	-4.58655×10^{-2}	-4.58704×10^{-2}	1.06×10^{-2}
77	-9.87628×10^{-3}	-9.87715×10^{-3}	8.79×10^{-3}
113	2.09744×10^{-2}	2.09766×10^{-2}	1.06×10^{-2}
149	5.19739×10^{-2}	5.19795×10^{-2}	1.09×10^{-2}
185	8.69186×10^{-2}	8.69282×10^{-2}	1.10×10^{-2}

5. 最適化計算例

本章では，2 例の数値解析例を通して本提案手法の妥当性を検証する．数値解析で用いる面内ユニットセル内の構成材料（phase1 と phase2）について，以下の組み合わせ方の異なる 3 パターンを考える．

- 熱膨張係数のみ異なるパターン (A)
- ヤング率のみ異なるパターン (B)

Table 6　Material parameters for material pattern(A)

	Young's modulus E [N/mm^2]	Thermal expansion coefficient α[1/℃]	Thermal stress coefficient β [N/(mm$^2\cdot$℃)]
phase-1	1.0×10^4	5.0×10^{-5}	5.0×10^{-1}
phase-2	1.0×10^4	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-1}

Table 7　Material parameters for material pattern(B)

	Young's modulus E [N/mm^2]	Thermal expansion coefficient α[1/℃]	Thermal stress coefficient β [N/(mm$^2\cdot$℃)]
phase-1	1.0×10^4	5.0×10^{-5}	5.0×10^{-1}
phase-2	1.0×10^5	5.0×10^{-5}	5.0×10^{0}

Table 8　Material parameters for material pattern(C)

	Young's modulus E [N/mm^2]	Thermal expansion coefficient α[1/℃]	Thermal stress coefficient β [N/(mm$^2\cdot$℃)]
phase-1	1.0×10^4	5.0×10^{-5}	5.0×10^{-1}
phase-2	1.0×10^5	1.0×10^{-5}	1.0×10^{0}

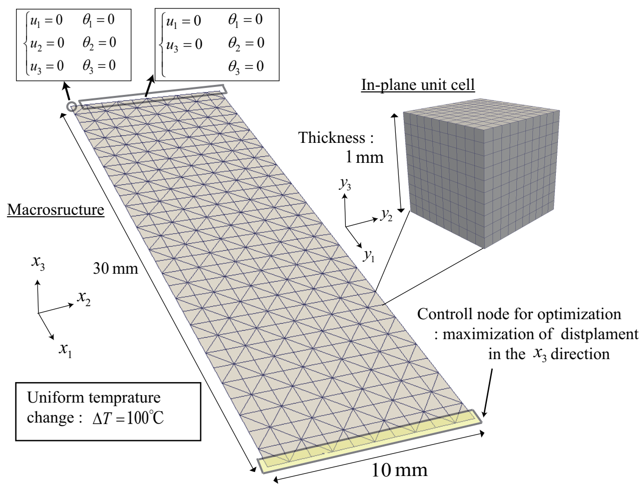

Fig. 8　Case1: Macroscopic plate with in-plane unit cell for numerical example

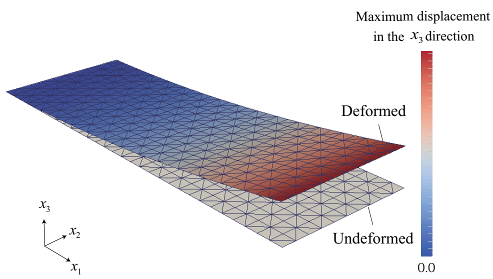

Fig. 9　Case1: Deformation of macroscopic plate reflecting optimal topology of in-plane unit cell

- 両パラメータとも異なるパターン (C)

各組み合わせパターンで与えた材料パラメータは Table6，Table7，Table8 に示すように設定する．これらの材料パターンを用いて解析し，結果を比較することで各材料パラメータが最適構造に及ぼす影響を考察する．なお，本研究では目的関数の感度に対してチェッカボードパターンを防ぐため，文献 [25] に準じたフィルターを適用した．また，最適化アルゴリズムには MMA [26] を用いた．

5.1　Case1 - 端部の変位量最大化問題　　ここでは，マクロの矩形形状の片辺を固定し，片辺の変位量を最大にする問題を考える．最適化制御点を記したマクロ構造の有限要素メッシュと境界条件ならびに面内ユニットセルの有限要素メッシュを Fig.8 に示す．

本最適化問題の結果として，最適化後の面内ユニットセルを反映したマクロ構造の変形図を Fig.9 に，得られた面内ユニットセルのトポロジーを Fig.10 に示す．また，x_1 軸方向垂直ひずみ（あるいは膨張ひずみ）$\tilde{E}_1$ と x_2 軸周りの曲げモーメント応力 $\tilde{M}_4$ とのカップリング剛性を表す B_{11} と x_1 軸方向の面外せん $\tilde{E}_4^{\mathrm{th}}$ 断応力 $\tilde{M}_8$ とのカップリング剛性を表す K_{12} の成分値，ならびに一般化熱ひずみの x_2 軸周りの曲率 $\tilde{E}_4^{\mathrm{th}}$ と x_1 軸方向の面外せん断ひずみ $\tilde{E}_8^{\mathrm{th}}$ の成分値を Table9 に，各ミクロ最適構造を反映したマクロ構造の x_3 方向最大変位量を Table10 に示す．このとき，パターン (B) については具体的な最構造が得られなかったため，パターン (A) と

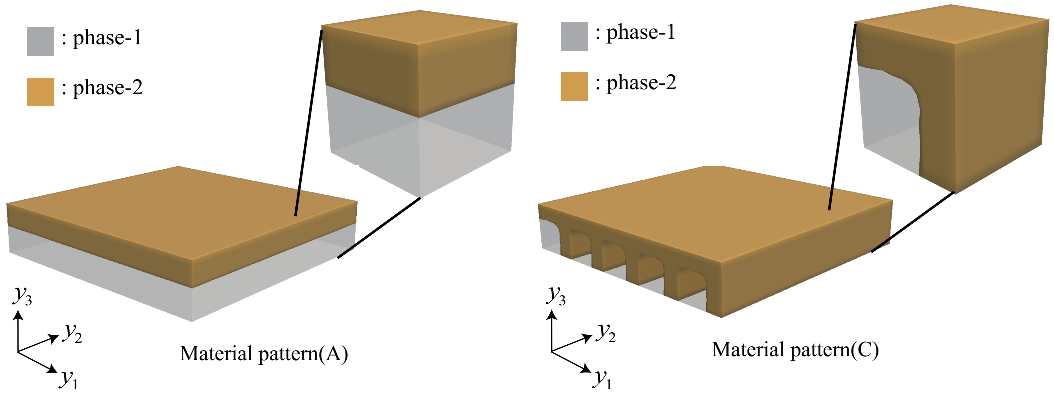

Fig. 10　Case1: Optimal topology of in-plane unit cell

パターン (C) のみの結果を示している．

まず，熱膨張係数のみ異なる材料パターン (A) の計算結果では，熱膨張係数の小さい phase-2 が上方に配置され，Table9 より一般化熱ひずみの曲率成分が卓越することが確認できた．次に，ヤング率と熱膨張係数のどちらも異なる材料パターン (C) では phase-2 が上方に配置され，縦部材が配置される結果となった．Table9 を参照すると，一般化熱応力の曲率成分 $\tilde{E}_4^{\mathrm{th}}$ だけではなく，他のカップリング剛性値，一般化熱ひずみの成分値も卓越していることがわかる．これにより，同じ熱膨張係数を用いたパターン (A) より一般化熱ひずみの曲率成分は小さい値ではあるが他の成分値が卓越することで，より大きなたわみを生じさせる最適構造が得られたものと考えられる．実際，パターン (A) で得られた最適構造にパターン (C) の材料パラメータを用いて解析を行った場合の x_3 方向の最大変位量は 1.93mm であり，Table10 に参照したパターン (C) の最適構造を用いた場合の最大変位量 2.44mm と比較すると，より大きなたわみを再現できていることが確認できる．これらはいずれも物理的に理にかなった構造であり，様々な境界条件や材料パターンを反映した最適構造が得られることが例証された．なお，Table10 より本解析では最大で 3mm 近くたわんでおり，有限変位・有限回転理論を適用した本解析が適切に行われていることがわかる．

一方，ヤング率のみ異なる材料パターン (B) の計算結果では，最適計算中に一切たわみは生じず，面内ユニットセルは初期の構造から変化しなかった．この条件では，熱膨張係数は設計変数に依存せず一定なため，常に面内方向の膨張しか働かないことが原因として考えられる．そこで，Fig.8 に示すマクロ構造の拘束節点について全方向の変位，回転自由度を固定し，膨張変形に対して垂直応力が働くような条件で解析を行った．得られた最適面内ユニットセルを Fig.11 に示す．この解析では，phase-2 が上方では軸方向に，下方では 45 ℃の傾きで配置され，面内方向の垂直応力と負の x_2 軸回りの曲率とねじり曲率のカップリング剛性 D_{41}，D_{61} が卓越する面内ユニットセルが得られた．この面内ユニットセルを反映したマクロ構造の変形図を Fig.12 に示す

Table 9　Case1: Homogenized plates stiffnesses and generalized thermal strain with optimal in-plane unit cell

Material pattern	(A)	(C)
$B_{1,1}$ [N]	-3.00×10^{-10}	1.01×10^{4}
$K_{1,2}$ [N/mm]	-9.04×10^{-11}	-5.89×10^{1}
$\tilde{E}_4^{\mathrm{th}}$ [1/mm]	-5.90×10^{-4}	-5.62×10^{-5}
$\tilde{E}_8^{\mathrm{th}}$	-9.37×10^{-19}	1.14×10^{-6}

Table 10　Case1: Maximum displacement of macroscopic plate

Material pattern	(A)	(C)
Maximum displacement[mm]	2.63	2.47

が，面内方向の垂直応力が過度に発生した固定端付近で局所的な曲げ変形が発生し，端部が x_3 方向に変位することが確認できた．

5.2　Case2 - ねじり変形最大化問題　　ここでは，マクロの矩形形状にねじり変形を生じさせる問題を考える．最適化制御点を記したマクロ構造の有限要素メッシュと境界条件ならびに面内ユニットセルの有限要素メッシュを Fig.13 に示す．

本最適化問題の結果として，最適化後の面内ユニットセルを反映したマクロ構造の変形図を Fig.14 に，得られた面内ユニットセルのトポロジーを Fig.15 に示す．また，x_1 軸方向垂直ひずみ（あるいは膨張ひずみ）$\tilde{E}_1$ とねじりモーメント応力 $\tilde{M}_6$ とのカップリング剛性を表す B_{13} の成分値，ならびに一般化熱ひずみのねじり曲率 $\tilde{E}_6^{\mathrm{th}}$ の成分値を Table11 に示す．また，本解析では材料パラメータの組み合わせパターンは (C) のみ用いて計算を行った．最適構造から phase-2 が上部と下部にクロスするように配置されていることが確認できる．Table11 を参照すると均質化板剛性のカップリング剛性

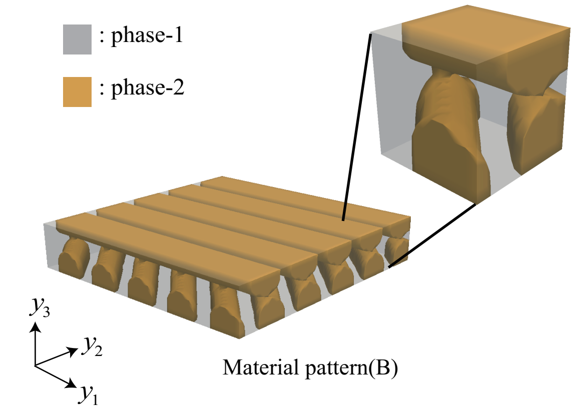

Fig. 11 Case1: Optimal topology of in-plane unit cell for material pattern(B)

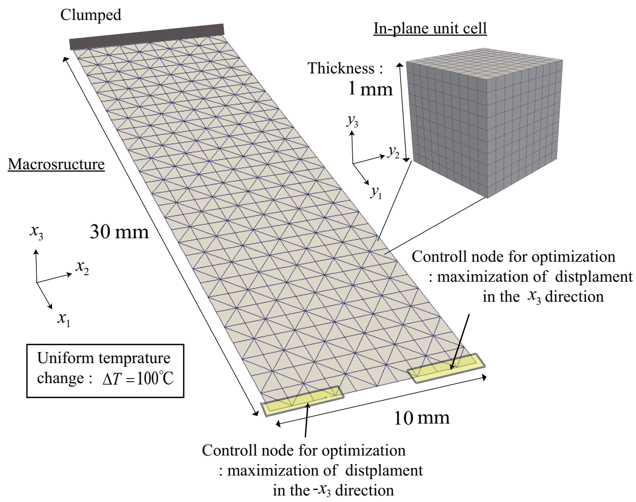

Fig. 13 Case2: Macroscopic plate with in-plane unit cell for numerical example

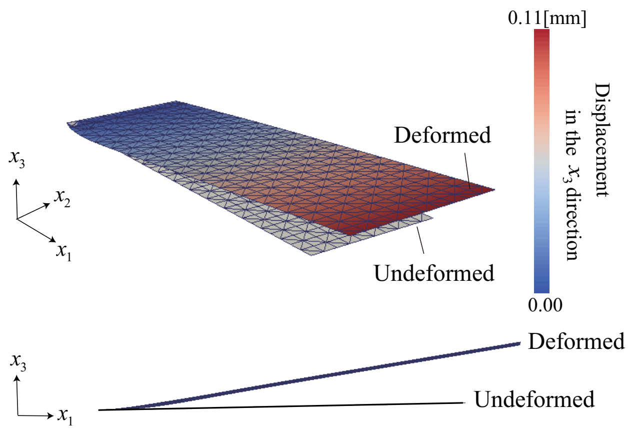

Fig. 12 Case1: Deformation of macroscopic plate reflecting optimal topology of in-plane unit cell for material pattern(B) (displacement scale × 30)

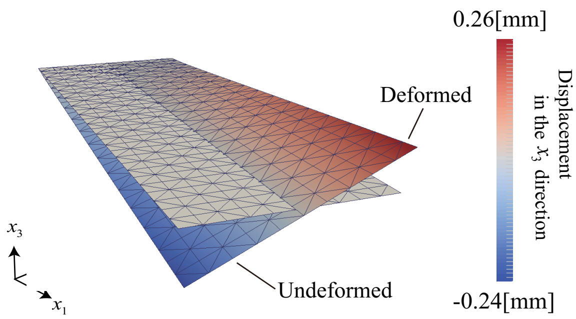

Fig. 14 Case2: Deformation of macroscopic plate reflecting optimal topology of in-plane unit cell (displacement scale × 10

と微小ではあるが一般化熱ひずみのねじりひずみ成分が卓越していることが確認できる．実際に，Fig.14 に示すようにマクロ構造にはねじり変形が発現している．

6. 結論

本研究では，面内周期性を有する複合板を対象として，そのマクロ的な変形を制御するような面内ユニットセルのトポロジーの最適化計算手法を提案した．具体的には，マクロ構造には厚板理論を適用し，ミクロ構造は3次元固体として定式化された複合板のマルチスケールモデルに対し，マルチスケールトポロジー最適化手法を適用して，マクロの節点変位を最大化するような面内ユニットセルの最適なトポロジーを導出する手法を構築した．特に，マクロ構造である厚板の力学挙動に共回転理論を採用することで，マクロ構造の大変位・大回転を考慮した面内ユニットセルの最適トポロジーの導出を可能とした．また，設定した目的関数について解析的感度の導出法を提案し，これにより低コストかつ信頼性に優れる最適化手法を導入可能とした．数値解析例としてマクロ構造に温度変化が与えられたときに指定した方向に変形させる問題を扱い，最適トポロジーが得られることを例証した．

ただし，本提案手法の実用化を進めるなかで，考慮すべき項目は少なくない．例えば，本研究では温度分布はすべて一様であるものと仮定したが，厳密に熱変形挙動を扱うには，熱伝導方程式との連成解析を行う必要がある．また，本研究では用いる材料構成則は線形弾性体に限定したが，弾塑性材料などの非弾性材料を仮定した解析への拡張については，いまだ複合板のマルチスケール手法自体が開発されておらず，特にマクロ材料構成則をマクロ運動方程式に導入する過程な

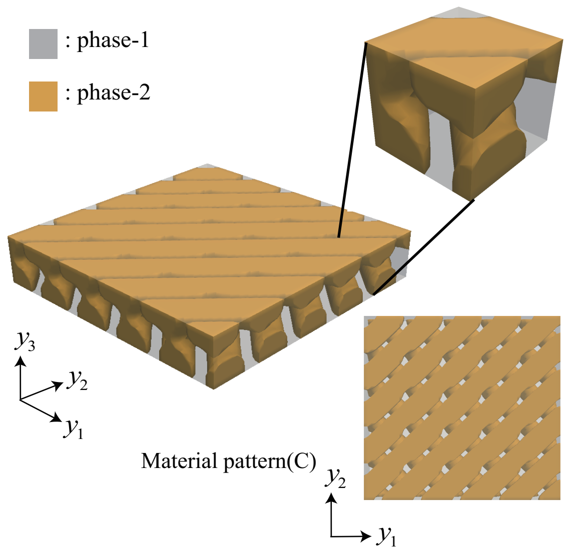

Fig. 15　Case2: Optimal topology of in-plane unit cell

Table 11　Case2: Homogenized plates stiffness and generalized thermal strain with optimal in-plane unit cell

Material pattern	(C)
$B_{1,3}$ [N]	1.99×10^{3}
$\tilde{E}_6^{\mathrm{th}}$ [1/mm]	-4.47×10^{-5}

どで自明でない点，解決すべき課題が幾つか存在する．さらに，有限要素メッシュのサイズや初期の設計変数分布が最適トポロジーに及ぼす影響を十分に検討できているとは言い難い．これらはいずれも今後の課題としたい．

謝辞: 本研究（の一部）は，戦略的イノベーション創造プログラム（SIP）「革新的設計生産技術」（管理法人：NEDO）の助成を受けたものです．ここに記して，感謝を表します．

付録 A：数値平板試験

ここでは，面内に周期的な非均質構造を有する複合厚板の均質化板剛性を算定するための「数値平板試験 [12,13]」の方法を述べる．

面内ユニットセルの支配方程式 (8) は，式 (3) で与えられるマクロ一般化ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}$ をデータとして，“面内 Y 周期的” なミクロ擾乱変位 $\boldsymbol{u}^*$ を未知数としている．いま，式 (8) よりミクロ変位 $\boldsymbol{w}$ を明示的に展開して書くと

$$\left\{\begin{aligned} w_1 &= \left(\tilde{E}^1+z_3\tilde{E}^4\right)y_1+\left(\tilde{E}^3+\frac{z_3}{2}\tilde{E}^6\right)\frac{y_2}{2}\\ &\qquad +\left(\tilde{E}^8-\frac{z_2}{2}\tilde{E}^6\right)y_3+u_1^* \end{aligned}\right.$$

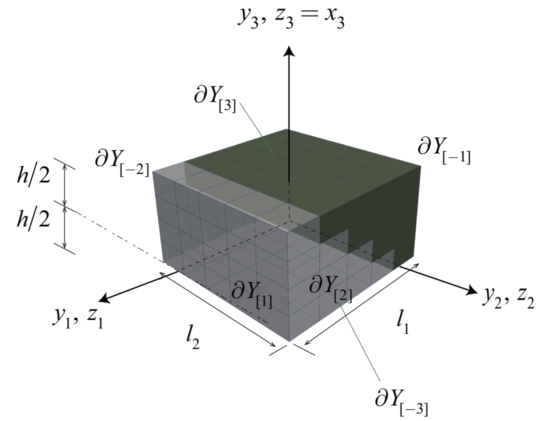

Fig. 16　Schematic of in-plane unit cell

$$\left\{\begin{aligned} w_2 &= \left(\tilde{E}^3+\frac{z_3}{2}\tilde{E}^6\right)\frac{y_1}{2}+\left(\tilde{E}^2+z_3\tilde{E}^5\right)y_2\\ &\qquad +\left(\tilde{E}^7-\frac{z_1}{2}\tilde{E}^6\right)y_3+u_2^*\\ w_3 &= \left(\tilde{E}^8-\frac{z_2}{2}\tilde{E}^6\right)y_1+\left(\tilde{E}^7-\frac{z_1}{2}\tilde{E}^6\right)y_2+u_3^* \end{aligned}\right. \tag{73}$$

となるが，面内の周期性を利用して $\boldsymbol{u}^*$ を消去すると，ミクロ変位場 $\boldsymbol{w}$ に関する拘束条件が次式のように得られる．

$$\left\{\begin{aligned} q_1^{[1]} &\equiv w_1^{[1]}-w_1^{[-1]}=\left(\tilde{E}^1+z_3\tilde{E}^4\right)l_1\\ q_2^{[1]} &\equiv w_2^{[1]}-w_2^{[-1]}=\frac{1}{2}\left(\tilde{E}^3+z_3\tilde{E}^6\right)l_1\\ q_3^{[1]} &\equiv w_3^{[1]}-w_3^{[-1]}=\left(\tilde{E}^8-\frac{z_2}{2}\tilde{E}^6\right)l_1 \end{aligned}\right. \tag{74}$$

$$\left\{\begin{aligned} q_1^{[2]} &\equiv w_1^{[2]}-w_1^{[-2]}=\frac{1}{2}\left(\tilde{E}^3+z_3\tilde{E}^6\right)l_2\\ q_2^{[2]} &\equiv w_2^{[2]}-w_2^{[-2]}=\left(\tilde{E}^2+z_3\tilde{E}^5\right)l_2\\ q_3^{[2]} &\equiv w_3^{[2]}-w_3^{[-2]}=\left(\tilde{E}^7-\frac{z_1}{2}\tilde{E}^6\right)l_2 \end{aligned}\right. \tag{75}$$

ここで，各変数に付される添え字 $[\pm i]$ は，Fig.16 に示している境界面 $\partial Y_{[\pm i]}$ 上の値であることを意味する．したがって，式 (8) を擾乱変位場 $\boldsymbol{u}^*$ について解く代わりに，ミクロ変位 $\boldsymbol{w}$ を未知数とする次の支配方程式を採用すれば良いことになる．

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{\partial}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}\right)\\ &\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\partial}_y\boldsymbol{w}\\ &\text{with (74) and (75)} \end{aligned}\right. \tag{76}$$

ここで，マクロ一般化ひずみ $\tilde{\boldsymbol{E}}$ の成分はすべてユニットセルの相対する境界面上の変位の拘束条件式 (74) および (75) のデータとして与えられるため，節点変位に関する多点拘束条件式を適切に設定すれば，比較的容易に汎用 FEM ソフトウェアを用いて解析可能である．

これらの各変形モードに対応するマクロ単位ひずみを $\Delta T=0$ の条件のもと与えることを考える．例えば，

Fig.3 の Mode1 に対応する単位一般化マクロひずみを

$$\left\{\tilde{E}^1 \quad \tilde{E}^2 \quad \tilde{E}^3 \quad \tilde{E}^4 \quad \tilde{E}^5 \quad \tilde{E}^6 \quad \tilde{E}^7 \quad \tilde{E}^8\right\}$$
$$= \left\{\hat{\tilde{E}}^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right\} \tag{77}$$

のように設定する．すると拘束条件式は

$$y_1\ 面 : \begin{cases} w_1^{[1]} - w_1^{[-1]} = \hat{\tilde{E}}^1 l_1 \\ w_2^{[1]} - w_2^{[-1]} = 0 \\ w_3^{[1]} - w_3^{[-1]} = 0 \end{cases} \tag{78}$$

$$y_2\ 面 : \begin{cases} w_1^{[2]} - w_1^{[-2]} = 0 \\ w_2^{[2]} - w_2^{[-2]} = 0 \\ w_3^{[2]} - w_3^{[-2]} = 0 \end{cases} \tag{79}$$

となる．この構造解析を行うと， 式 (9) により得られるマクロ一般化応力 $\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{out}}$ は式 (15) の関係より次式のようになる．

$$\tilde{D}_{i1} = \tilde{M}_i^{\mathrm{out}} \tag{80}$$

これを全 8 モードについて行うことで，均質化板剛性行列の全成分を得られることになる．

一方，マクロ一般化熱応力を導出する際には，次式のような入力データを与える．

$$\left\{\tilde{E}^1 \quad \tilde{E}^2 \quad \tilde{E}^3 \quad \tilde{E}^4 \quad \tilde{E}^5 \quad \tilde{E}^6 \quad \tilde{E}^7 \quad \tilde{E}^8\right\}$$
$$= \left\{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right\} \tag{81}$$
$$\Delta T = 1 \tag{82}$$

この構造解析を行うと，式 (9) により得られるマクロ一般化応力 $\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{out}}$ は式 (15) の関係より次式のようになる．

$$\tilde{M}_i^{\mathrm{th}} = -\tilde{M}_i^{\mathrm{out}} \tag{83}$$

また，面外せん断変形を与えることを考えると，z_3 方向に対する拘束だけでは剛体回転が生じ，解が不定になる．そこで次式のようにユニットセルに対し，全体回転拘束条件を負荷する．

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-l_1/2}^{l_1/2}\int_{-l_2/2}^{l_2/2} w_2 y_3 dy_1 dy_2 dy_3 = 0 \tag{84}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-l_1/2}^{l_1/2}\int_{-l_2/2}^{l_2/2} w_1 y_3 dy_1 dy_2 dy_3 = 0 \tag{85}$$

以上の方程式を離散化することで，多点拘束条件式にあてはめることができる．詳細については，文献 [12,13] を参照されたい．

付録 B：共回転理論定式化の補足

ここでは，第 3 章で記述した局所系における弾性変形に起因する自由度と全体座標系における全運動に関する自由度の微小増分量の関係を提示する．また，ニュートン法に基づく反復計算を行うための式 (48) に提示した接線剛性行列 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}$ について詳細に導出する．

B1. 各変数の変分

まず，回転行列の変分 $\delta\boldsymbol{T}$ の導出を行う．式 (21) の左辺を展開すると，

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{aC}^R = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_{aC}^R = \boldsymbol{T}\boldsymbol{R}^0\boldsymbol{x}_{aC}^0 \tag{86}$$

となる．また，右辺は $\overline{\boldsymbol{x}}_{aC^0}^0 = \boldsymbol{T}^0\boldsymbol{x}_{aC^0}^0$ であるので，最終的に以下の式を導くことができる．

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^0\boldsymbol{R}^{0\mathrm{T}} \tag{87}$$

上式の変分をとると

$$\delta\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_0\delta\boldsymbol{R}^{0\mathrm{T}} \tag{88}$$

となる．上式の $\delta\boldsymbol{R}^{0\mathrm{T}}$ は，具体的な計算が困難なため，局所座標系の回転の増分を表す回転擬ベクトル $\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}}$ を用いて表すことにする．この $\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}}$ によれば，$\delta\boldsymbol{x}_{aC}^{\mathrm{R}}$ は

$$\delta\boldsymbol{x}_a^{\mathrm{R}} = \delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}} \times \boldsymbol{x}_a^{\mathrm{R}} = \mathrm{spin}(\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}})\boldsymbol{x}_a^{\mathrm{R}} \tag{89}$$

と表すことができる．一方，剛体回転行列 $\boldsymbol{R}^0$ を用いると $\delta\boldsymbol{x}_{aC}^{\mathrm{R}}$ は，

$$\delta\boldsymbol{x}_a^{\mathrm{R}} = \delta\boldsymbol{R}^0\boldsymbol{x}_a^0 = \delta\boldsymbol{R}^0\boldsymbol{R}^{0\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_a^{\mathrm{R}} \tag{90}$$

となる．よって式 (89)，式 (90) より，

$$\mathrm{spin}(\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}}) = \delta\boldsymbol{R}^0\boldsymbol{R} \tag{91}$$

となる．上式を用いると，式 (88) は最終的に次式のようになる．

$$\delta\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{T}^0\boldsymbol{R}^{0\mathrm{T}}\mathrm{spin}(\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}}) = -\boldsymbol{T}\mathrm{spin}(\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}}) \tag{92}$$

ここで，式 (87) と $\mathrm{spin}(\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}})$ は反対称行列であるため，$\mathrm{spin}(\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}} = -\mathrm{spin}(\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}})$ であることを利用した．

まず，変位について，式 (20) の変分は式 (92) を用いて次式のように導出される．

$$\begin{aligned} \delta\overline{\boldsymbol{u}}_a^{\mathrm{e}} &= \delta\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{x}_a^0 - \boldsymbol{x}_{C^0}^0 - \boldsymbol{u}_C\right) + \boldsymbol{T}\left(\delta\boldsymbol{u}_a - \delta\boldsymbol{u}_C\right) \\ &= -\boldsymbol{T}\mathrm{spin}(\delta\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{R}})\boldsymbol{x}_{aC} + \delta\overline{\boldsymbol{u}}_a - \delta\overline{\boldsymbol{u}}_C \\ &= \mathrm{spin}(\boldsymbol{x}_a)\delta\overline{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{R}} + \delta\overline{\boldsymbol{u}}_a - \delta\overline{\boldsymbol{u}}_C \\ &= \sum_{b=1}^{3}\left(\boldsymbol{U}_{ab} + \overline{\boldsymbol{S}}_a\overline{\boldsymbol{G}}_{u,\,b}\right)\delta\overline{\boldsymbol{u}}_b \end{aligned} \tag{93}$$

ここで，式 (93) の $\boldsymbol{U}_{ab}, \boldsymbol{S}_a$， $\boldsymbol{G}_{u,\,b}$ は，それぞれ

$$\boldsymbol{U}_{ab} = \left(\delta_{ab} - \frac{1}{3}\right)\boldsymbol{I} \tag{94}$$

$$\boldsymbol{S}_a = \mathrm{spin}(\overline{\boldsymbol{x}}_a) \tag{95}$$

$$\boldsymbol{G}_{u,\,b} = \frac{\partial\overline{\boldsymbol{\omega}}}{\partial\overline{\boldsymbol{u}}_b} \tag{96}$$

である．ここで，$\boldsymbol{I}$ は 3×3 の恒等行列である．また，$\mathrm{spin}(\overline{\boldsymbol{x}_a})$ は，式 (35) の操作により次式のような成分を持つ．

$$\mathrm{spin}(\overline{\boldsymbol{x}}_a) = \begin{bmatrix} 0 & -\overline{z}_a & \overline{y}_a \\ \overline{z}_a & 0 & -\overline{x}_a \\ -\overline{y}_a & \overline{x}_a & 0 \end{bmatrix} \tag{97}$$

ここで，y_a，z_a は第2章で用いたミクロ座標系ではなく，本章では座標値 $\boldsymbol{x}$ の成分として $\boldsymbol{x}_a = \{x_a, y_a, z_a\}$ のように用いていることに注意されたい．また，$\boldsymbol{G}_{u,\,b}$ は，節点 b の各変位に対する初期座標軸から共回転座標軸へ増分量を表す行列であり，その成分は要素の種類や各局所座標軸の設定の仕方に依存して変化する [17–19]．本解析では，次式のようにこの項を求めている．

$$\boldsymbol{G}_{u,\,1} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{x}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{y}_{32} \\ 0 & -\dfrac{2A}{l_{12}} & 0 \end{bmatrix} \tag{98}$$

$$\boldsymbol{G}_{u,\,2} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{x}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{y}_{13} \\ 0 & \dfrac{2A}{l_{12}} & 0 \end{bmatrix} \tag{99}$$

$$\boldsymbol{G}_{u,\,3} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{x}_{21} \\ 0 & 0 & \bar{y}_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{100}$$

ここで，A は各要素の面積であり，l_{12} は各要素の節点1，2を結ぶ線分の長さである．これらの行列の成分については，文献 [17–19] を参照されたい．

最後に，節点 a の微小増分変形回転ベクトルの変分 $\delta\overline{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{e}}_a$ を導出すると次式のようになる．

$$\delta\overline{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{e}}_a = \delta\overline{\boldsymbol{\omega}}_a - \delta\overline{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{R}} \tag{101}$$

$$= \sum_{b=1}^{3}\{-\overline{\boldsymbol{G}}_{u,\,b}\delta\overline{\boldsymbol{u}}_b + \delta_{ab}\delta\overline{\boldsymbol{\omega}}_b\} \tag{102}$$

$$= \sum_{b=1}^{3}\{-\overline{\boldsymbol{G}}_{u,\,b} + \delta_{ab}\boldsymbol{I}\}\delta\overline{\boldsymbol{d}}_b \tag{103}$$

本章で示した関係をまとめると次式のようになる．

$$\delta\overline{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{e}}_a = \sum_{b=1}^{3}\overline{\boldsymbol{P}}_{ab}\delta\overline{\boldsymbol{d}}_b \tag{104}$$

$$\overline{\boldsymbol{P}}_{ab} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{ab} + \overline{\boldsymbol{S}}_a\overline{\boldsymbol{G}}_{u,\,b} & \boldsymbol{0}_3 \\ -\overline{\boldsymbol{G}}_{u,\,b} & \delta_{ab}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{105}$$

ここで，$\boldsymbol{0}_3$ はすべての成分が0である3×3の行列である．上の関係を簡単に $\delta\overline{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{e}} = \overline{\boldsymbol{P}}\delta\overline{\boldsymbol{d}}$ のように書くと，共回転座標系における弾性変形変位ベクトル増分 $\delta\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}}$ と全体座標系の全変位ベクトル増分 $\delta\boldsymbol{d}$ は

$$\delta\overline{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{e}}_a = \overline{\boldsymbol{H}}\delta\overline{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{e}} = \overline{\boldsymbol{H}}\,\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{T}_{(6)}\delta\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\Lambda}\delta\boldsymbol{d} \tag{106}$$

のように表すことができる．ここで，$\overline{\boldsymbol{H}}$，$\boldsymbol{T}_{(6)}$，$\boldsymbol{\Lambda}$ はそれぞれ次式のように定義した．

$$\overline{\boldsymbol{H}} = \mathrm{diag}\left[\boldsymbol{I}\;\overline{\boldsymbol{H}}_1\;\boldsymbol{I}\;\overline{\boldsymbol{H}}_2\;\boldsymbol{I}\;\overline{\boldsymbol{H}}_3\right] \tag{107}$$

$$\boldsymbol{T}_{(6)} = \mathrm{diag}\left[\boldsymbol{T}\;\boldsymbol{T}\;\boldsymbol{T}\;\boldsymbol{T}\;\boldsymbol{T}\;\boldsymbol{T}\right] \tag{108}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \overline{\boldsymbol{H}}\,\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{T} \tag{109}$$

B2. 接線剛性行列

最後に，Newton-Raphson 法による反復計算により非線形方程式を解くための接線剛性行列を導出する [21]．まず，式 (47) の変分をとると，

$$\delta\boldsymbol{f} = \delta\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\delta\overline{\boldsymbol{f}} \tag{110}$$

となる．上式の右辺第2項を整理すると，次式のようになる．

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\delta\overline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\Lambda}\delta\boldsymbol{d} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{M}}\delta\boldsymbol{d} \tag{111}$$

この式内で定義した $\boldsymbol{k}_{\mathrm{M}}$ は材料接線剛性行列であり，各有限要素の材料特性に依存するため，本研究においては面内ユニットセルのトポロジーの影響を陽的に受ける項である．

式 (110) の右辺第1項は，

$$\delta\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}} = \left(\delta\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\delta\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\delta\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\right)\overline{\boldsymbol{f}} \tag{112}$$

のようになる．上式の右辺第1項は次式のように展開される．

$$\delta\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}} = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\mathrm{spin}(\overline{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{P}})\overline{\boldsymbol{G}}\delta\boldsymbol{d} \tag{113}$$

$$= \boldsymbol{k}_{\mathrm{GR}}\delta\boldsymbol{d} \tag{114}$$

この式中で定義した $\boldsymbol{k}_{\mathrm{GR}}$ は，回転幾何剛性行列であり，全体座標系にて剛体回転に依存して変化する内力ベクトルの影響を反映した行列である．なお，$\overline{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{P}}$ は式 (105)，式 (32) を用いて $\overline{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{P}} = \overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}}$，$\overline{\boldsymbol{G}}$ は式 (98)，式 (99)，式 (100) を用いて $\overline{\boldsymbol{G}} = \{\overline{\boldsymbol{G}}_{u,1}, \boldsymbol{0}_3, \overline{\boldsymbol{G}}_{u,2}, \boldsymbol{0}_3, \overline{\boldsymbol{G}}_{u,3}, \boldsymbol{0}_3\}$ とそれぞれ定義している．

さらに，式 (112) の右辺第2項は次式のように展開される．

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\delta\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}} = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\delta\overline{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}}\mathrm{spin}\left(\overline{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{P}}\right)^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d} \tag{115}$$

$$= \boldsymbol{k}_{\mathrm{GP}}\delta\boldsymbol{d} \tag{116}$$

この行列 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{GP}}$ は近似的に導かれる項であり，メッシュが粗く弾性変形が大きくなる場合，この関係が満たされない可能性もありうる [18]．そのため，数値微分などによりこの項を求める報告例 [27] もあるが，本研究の対象とする構造問題については収束精度に大きな影響はなかったため，これらの関係式を採用する．

最後に，式 (112) の右辺第3項は次式のようになる．

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\delta\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\overline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}}\right]\overline{\boldsymbol{H}}\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{T}\delta\boldsymbol{d} \tag{117}$$

$$= \boldsymbol{k}_{\mathrm{GM}}\delta\boldsymbol{d} \tag{118}$$

ここで，$\dfrac{\partial}{\partial\overline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}}\right]$ は次式のように展開できる．

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}}\right] = \Big\{\eta\left[\left(\overline{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{m}}\right)\boldsymbol{I}_3 + \overline{\boldsymbol{\theta}}\overline{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{T}} - 2\overline{\boldsymbol{m}}\overline{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\right] + \mu\,\mathrm{spin}(\overline{\boldsymbol{\theta}})^2\overline{\boldsymbol{m}}\overline{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathrm{spin}(\overline{\boldsymbol{m}})\Big\} \tag{119}$$

ここで η は式 (34) で定義した係数であり，μ は次式のように求めた．

$$\mu = \frac{\overline{\theta}_a^{e\,2} + 4\cos\overline{\theta}_a^{e} + \overline{\theta}_a^{e}\sin\overline{\theta}_a^{e} - 4}{4\overline{\theta}_a^{e\,4}\sin^2\left(\frac{\overline{\theta}_a^{e}}{2}\right)} \simeq \frac{1}{360} + \frac{1}{7560}\overline{\theta}_a^{e\,2} \tag{120}$$

以上をまとめると，式 (110) 左辺の内力ベクトルの変分 $\delta\boldsymbol{f}$ は最終的に，式 (111)，式 (114)，式 (116)，式 (118) を用いて

$$\delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d} \tag{121}$$

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{M}} + \boldsymbol{k}_{\mathrm{GR}} + \boldsymbol{k}_{\mathrm{GP}} + \boldsymbol{k}_{\mathrm{GM}} \tag{122}$$

となる．なお，この全体座標系における接線剛性行列 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}$ は非対称行列であるが，Nour-Omid ら [28] の報告では，この接線剛性行列の対称成分のみ用いたほうが，Newton-Raphson の反復計算の収束速度が早いと言われている．そのため本研究では簡単のため，接線剛性行列を対称化した次式を用いることにする．

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\right\} \tag{123}$$

参考文献

(1) 末益博志，入門　複合材料の力学.

(2) 西脇眞二，泉井一浩，菊池昇, トポロジー最適化，日本計算工学会編，丸善，2013，pp. 92-98.

(3) Nishiwaki, S., Frecker, M.I., Min. S., Kikuchi, N., Homogenization optimization of compliant mechanisms using the homogenization method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, 1998, P. 535-559.

(4) Kolestar, E.S., Allen, P.B., Howard, T.H., Wilken, J.M., Boydston, N., Thermally-acutuated cantilever beam for achieving large in-plane mechanical deflections, *Thin Solid Films*, Vol.355-356, 1999, pp.295-302..

(5) Bendsøe，M.P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, 1988, pp. 197-224.

(6) Yang，R.J. and Chuang, C.H., Optimal topology design using linear programing, *Computer & Structures*, Vol. 52, No. 2, 1994, pp. 265-275.

(7) Bendsøe，M.P. and Sigmund, O., Material interpolation schemes in topology optimization, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, 1999, pp. 635-654.

(8) Murat, F. and Tartar, L., Optimality conditions and homogenization, *Research Notes in Mathematics*, Vol. 127, 1988, pp .1-8.

(9) Rodrigues, H., Guedes, J.M. and Bendsoe, M.P., Hierarchical optimization of material and structure, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 24, No. 1, 2002, pp. 1-10.

(10) Huang, X., Zhou, S.W., Xie, Y.M. and Li, Q., Topology optimization of microstructures of cellular materials and composites for macrostructure, *Computational Materials Science*, Vol. 67, 2013, pp. 397-407.

(11) Niu, B., Yan, J. and Chen, G., Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 39, No. 2, 2009, pp. 115-132.

(12) 寺田賢二郎，平山紀夫，山本晃司，松原成志朗, 複合板の線形マルチスケール解析のための数値平板試験, 計算工学会論文集, No.20150001, 2015.

(13) Terada, K., Hirayama, N., Yamamoto. K., Muramatsu, M., Matsubarqa, S. and Nishi., S., Numerical plate testing for linear two scale analyses of composite plates with in-plane periodicity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 105, 2016, P. 111-137.

(14) Terada, K., Kato, J., Hirayama, N., Inugai, T. and Yamamoto, K., A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials., *Computational Mechanics*, Vol. 52, 2013, pp. 1199-1219.

(15) 谷地大舜，加藤準治，高瀬慎介，寺田賢二郎, 京谷孝史, マルチスケールトポロジー最適化手法と解析的感度導出手法の提案, 計算工学会論文集，No. 20130022, 2013.

(16) Kato, J., Yachi, D., Terada, K. and Kyoya, T., Topology optimization of micro-structure for composites applying a decoupling multi-scale analysis, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 49, 2013, pp. 595-608.

(17) Yang, J.S. and Xia, P.J., Finite element corotational formulation for geometric nonlinear analysis of thin shells with large rotation and small strain, *Science China Technological Sciences*, Vol. 55, No. 11, 2012, pp. 3124-3152.

(18) Felippa, C.A. and Haugen, B., A unified formulation of small-strain corotational finite elements:I. Theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, 2005, pp. 2285-2335.

(19) Battini, J.M. and Pacoste, C., On the choice of local element frame for corotational triangular shell elements, *Communications In Numerical Methods In Engineering*, Vol. 20, 2004, pp. 819-825.

(20) Bergan，P.G. and Felippa，C.A.，A triangular membrane element with rotational degrees of freedom，*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*，Vol. 50，1985，pp. 25-69.

(21) Felippa，C.A.，A Study of Optimal Membrane Triangles with Drilling Freedoms，*Center for Aerospace Structures*，report CU-CAS-03-02，2003.

(22) Battini, J.M. and Pacoste, C., On the choice of the linear element for corotational triangular shells, *Communications In Numerical Methods In Engineering*, Vol. 195, 2006, pp. 6362-6377.

(23) Gao, T., Zhang, W., Topology optimization involving thermo-elastic stress loads, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.42, 2010, pp.725-738.

(24) Stolpe, M., Svanberg, K., An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.22, 2001, pp.116-124.

(25) Borrvall, T., Topology optimization of elastic continua using restriction, *Archives of Computational Methods in Engineering.*, Vol. 8, No. 4, 2001, pp. 351-385.

(26) Svanberg,K., A class of globally convergent optimization method based on conservative convex separatable approximation, *SIAM Journal on Optimization*, Vol.12, No.2, 2002 ,pp.555-573.

(27) Pajot, J. M. and Maute, K., Analytical sensitivity analysis of geometrically nonlinear structures based on the corotational finite element method, *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 42, 2006, pp. 900-913.

(28) Nour-Omid, B. and Rankin, C.C., Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, 1991, pp. 353-384.