

## 多層材料レイアウト最適化手法のロックボルト支保工への適用性検証

Numerical investigation of optimal layout of rockbolts for ground structures

加藤 準治\*・石井 慶一郎\*\*・寺田 賢二郎\*\*\*・京谷 孝史\*\*\*\*

Junji KATO, Keiichiro ISHII, Kenjiro TERADA and Takashi KYOYA

\*正会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

\*\*学生会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

\*\*\*正会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

\*\*\*\*正会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

Due to difficulty to obtain reliable ground data, layout of rockbolts is determined entirely in a classical way assuming an isotropic rock stress condition. The present study assumes anisotropic stress condition and optimizes layout of rockbolts in order to maximize the stiffness of unstable ground of tunnels and slopes by applying multiphase layout optimization. It was verified that this method has a certain possibility to improve the stiffness of unstable ground.

**Key Words :** multiphase layout optimization, rockbolts, reinforcement, NATM

### 1. はじめに

ロックボルト支保工は、トンネルの代表的な施工法である NATM 工法や法面補強に古くから用いられている。地山補強のメカニズムは、地山に打設したロックボルトの引張力を介して地山との一体化を図り、その一体構造の剛性を向上させることで地山の崩壊を防ぐものである。

ロックボルト支保工は、これまでに多くの実績をもつものの、その配置を決定する上での問題点は、必要な地盤データが十分に得られていない状況下で工事を行わなければならないことである。例えば NATM 工法に関して言うと、掘削面から幾分離れた場所にある地山の物理定数を得ることは困難であるため、まずは乏しい地盤データから大まかな地山分類を行い、これまでの経験と実績によって定められた標準支保工配置の中から条件に合うものを選択するという方法がとられている。このロックボルト配置は標準支保パターンと呼ばれ、大抵は同じ長さのロックボルトを放射状に等間隔に打設するもので等方的な地圧に対して有効な配置を呈している。

しかし一方で、トンネル掘削時における地山の応力状態は、掘削前の初期地圧や周辺地形による偏土圧、岩盤の強度や不連続面、さらに地下水による影響などを受けて複雑な応力状態にあり、むしろ異方的な地圧を受けていると言ってよい。例えば土被りが比較的小さいトンネルでは鉛直方向の地圧が卓越し、大断面トンネルではトンネル側方や下側からの地圧が大きくなる傾向にある。そのため、等方的な応力状態に加え、異方的な応力状態にある地山に対して力学的に理にかなったロックボルト配置を算出しておくことは現場で起こり得る想定外の掘削面変状に対し、即座にロックボルト配置を決定できるという点で有効であると考えられる。そこで本研究では、異方的な地圧を受けるトンネ

ルの地山補強問題を対象に、地山とロックボルトを含めた構造の剛性を最大にするようなロックボルト配置の最適化問題を定式化、さらにそれを解く手法を提示し、その適用性について検証することを目的とする。

しかし、この種の問題を経験的手法によって解くことは困難である。そのため、ここでは数的手法の一つである有限要素法を用いた構造最適化、特に多層材料レイアウト最適化<sup>1)</sup>と呼ばれる手法を用いてこの最適化問題を解く。

多層材料レイアウト最適化は、繊維補強複合材の剛性や靱性を改善するためにその補強材の種類や太さおよびレイアウト(全体形状)を同時に最適化するために開発されたものである。本手法の特徴の一つは、埋込み要素<sup>2,3,4,5,6,7)</sup>と言われる特殊な有限要素を用いて補強材を離散化する点にあり、これによって力学的に現実性の高い複合材料モデルが構築され、さらには補強材のレイアウトの変化も簡単に扱うことが可能となる。

本研究では、その繊維補強材をロックボルトに置き換え、ロックボルトの太さと長さを変化させることで最適なロックボルト配置を決定する。なお、当該最適化問題において地山とロックボルトの力学的挙動を忠実に反映するためには地山の亀裂状態とその強度の評価ならびに吹付けコンクリートやロックボルト-地山間の滑り、あるいはそこに注入されるモルタルの材料非線形挙動等を含めた3次元の構造モデルを構築する必要がある。しかし、本研究はロックボルト支保工の配置問題に多層材料レイアウト最適化法を導入するという基礎的な段階にあるため、ここでは簡単のため線形材料モデルを使用し、また吹付コンクリートの影響は考慮せず、さらにロックボルト-地山間に滑りの生じない理想的な状態を想定した2次元の平面問題を対象に最適化を行う。以下では多層材料レイアウト最適化と埋込み要素を用いた場合の有限要素式について簡単に

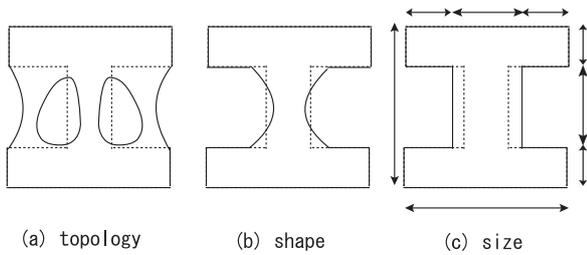


図-1 構造最適化の分類：(a) トポロジー最適化，(b) 形状最適化，(c) 寸法最適化

述べ、さらに本研究で設定した最適化問題および感度の導出方法について記述する。

また、本研究の最適化問題の解法については勾配法を基本とし、数値解析上のロバスト性と信頼性に富む漸近線移動法<sup>8),9),10)</sup> (method of moving asymptotes: 以降, MMA とする) を用いる。最後に NATM 工法で用いるロックボルトに加え、法面補強用のロックボルトを対象にした最適化計算を行うことで本手法の実設計への適用可能性を検証する。

## 2. 多層材料レイアウト最適化

### 2.1 概要

構造最適化は、構造の剛性や耐荷力、固有振動数など力学的な特性値を目的関数として定義し、その関数値を数学的アプローチによって最小もしくは最大にすることで構造の力学的挙動を改善する手法である。

構造最適化は、一般に図-1 に示す3つに分類することができる。トポロジー最適化は構造の位相を、形状最適化はトポロジーを保持しながらその構造の外郭もしくは内部形状を、寸法最適化は文字どおり部材等の最適寸法を決定するものである。これらはいずれも構造の幾何に関するものである。

一方、それらとは別に材料最適化という種類もあり、これは構成材料の最適な種類や配置を決定するものである。多層材料レイアウト最適化<sup>1)</sup>は材料最適化手法の一つで、前述のとおり繊維補強複合材の剛性や靱性の改善を意図してその補強材の種類や太さおよび全体形状を同時に最適化する手法である。この手法は、多層材料最適化<sup>11)</sup>および材料形状最適化<sup>12)</sup>という2つの手法を組合せたもので、前者は補強材の種類や太さを、後者は補強材の曲線形状を含めた全体形状を最適化するものである。本研究では、補強材を直線のロックボルトに置き換え、その長さや太さを設計変数として扱う。

ここでは、多層材料最適化と材料形状最適化の概要について述べ、それらの詳細についてはそれぞれ文献<sup>11),12)</sup>を参照されたい。

なお、本論文で使用する上添え字 $(\bullet)^f$ 、 $(\bullet)^b$ はそれぞれ地山とロックボルトの項であることを意味する。また、式によっては $(\bullet)^{f+b} = (\bullet)^f + (\bullet)^b$ という簡潔な表現を用いる。下添え字 $(\bullet)_L$ 、 $(\bullet)_G$ はそれぞれロックボルト軸方向を示す局所座標と全体座標系で定義した値を意味し、 $(\bullet)_G$ は簡単のため特に必要がない限り省略する。

### 2.2 多層材料最適化

ここでは2層材料最適化について概説する。文献<sup>11)</sup>では、2層複合材料の有効線形弾性係数 $\mathbb{C}$ を以下のように定義している。

$$\mathbb{C} = (1 - s^{\hat{\eta}})\mathbb{C}_1 + s^{\hat{\eta}}\mathbb{C}_2 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbb{C}_1$ と $\mathbb{C}_2$  ( $\mathbb{C}_1 \leq \mathbb{C}_2$ ) はそれぞれ構成する2つの固体層である phase-1 と phase-2 の線形弾性係数を指す。 $\hat{\eta}$  は2つの固体層の弾性係数を内挿する式(1)のべき乗数である。また、 $s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) は設計変数を意味し、ある有限要素内に混入する phase-2 の体積比を表している。文献<sup>11)</sup>では有限要素として一般的な四辺形要素の使用を前提としているため、その設計変数 $s$ は次のように定義されている。

$$s = r_1/r_0 \quad (2)$$

ここで、 $r_0$ 、 $r_1$  は、それぞれある有限要素一辺の高さ(あるいは幅)とその要素内における phase-2 の実際の高さ(あるいは幅)である。例えば、phase-2 の体積比がゼロ、すなわち $s = 0$ の場合、その要素はすべて phase-1 の材料で占められ、 $s = 1$ の場合は逆に phase-2 のみが占有し、 $0 < s < 1$  のときは phase-1 と phase-2 の混合物であることを意味する。

一方、本研究では3章で紹介する埋込み要素を用いるため、一般的な有限要素の使用を前提とする式(1)とは若干異なる形となる。

埋込み要素は基質材の有限要素の上に補強材の位置や傾き、長さなどを考慮した剛性を重ね合わせる特殊な要素である。すなわち、地盤材料とロックボルトを分離して考え、ロックボルトに疑似的に2層材料最適化の概念を適用する。この場合、phase-1 は実在しない材料、phase-2 はロックボルトである。式(1)に実在しない材料として $\mathbb{C}_1 = \mathbf{0}$ を代入し、また後に誘導する式との整合をはかるため $\mathbb{C}_2$ をロックボルトの弾性係数 $\mathbb{C}^b$ で置き換え、さらにロックボルトは一次元で考えているためその軸方向の弾性係数 $\mathbb{C}_L^b$ に対して式(1)を整理すると以下ようになる。

$$\mathbb{C}_L = s^{\hat{\eta}}(\mathbb{C}_2)_L = s^{\hat{\eta}}\mathbb{C}_L^b \quad (3)$$

ここで、 $\mathbb{C}_L$ はロックボルト軸方向の有効線形弾性係数であり、 $s^{\hat{\eta}} = r_1/r_0$  ( $0 \leq s^{\hat{\eta}} \leq 1$ ) はロックボルトの太さを表す設計変数で次節のロックボルト長さを表す設計変数 $s^l$ と区別するために再定義した。なお、ここでの $r_0$ 、 $r_1$ はそれぞれ3章の埋め込み要素内のロックボルト最大太さ(既知)と実際の太さである。

また、この場合ロックボルトを疑似的に2層材料と想定しているがその有効弾性係数はロックボルトの太さに比例することは明らかであるため、 $\hat{\eta} = 1$ として扱うことができる。そこで、 $s^{\hat{\eta}} = 0$ の場合はロックボルトの剛性はゼロでロックボルトが埋め込まれていない状態を表し、 $s^{\hat{\eta}} = 1$ の場合は最大太さ $r_0$ のロックボルトがその要素に存在することを意味している。これにより、ロックボルトの最適な太さが決定でき、太さがゼロとなる場合はそこにはロックボルトを用いないこと、すなわち本数を減らすことに対応する。

### 2.3 材料形状最適化

ロックボルトのような細い線状の補強材を基質材とともに一般的な有限要素を用いて離散化しようとする非常に複雑な要素メッシュとなる。また、最適化計算途中においてロックボルト配置を変化させるたびにその複雑な要素メッシュを更新する必要があるが扱いにくい。そのため、それらを簡便的に均質な異方性材料として扱い、補強材と基質材の体積比と補強材角度を各要素で変数にとる材料モデルを用いることが多い。しかし、この種の材料モデルは要素内で補強材の明確な位置を表現できず、また隣接する要素間で補強材が不連続<sup>13)</sup>となり、力学的に現実性に乏しいモデルであると言える。

これらの問題を解決するために開発されたのが本節で提示する材料形状最適化である。材料形状最適化は、補強材のレイアウトを全体座標系で定義することにより基質材要素に対するメッシュ依存性を回避し、要素間で連続な補強材の表現を可能にする。具体的にはまず、補強材の全体形状を関数でパラメータ化し、それを全体座標系で定義された全体構造の中に埋め込み、その形状を定義する制御点の座標を変化させることで補強材のレイアウトを全体座標系で定義する。なお、文献<sup>12)</sup>では曲線形状の補強材を対象としているが本研究では直線の補強材を想定している。そのため、結果的には本手法を適用することで補強材の長さを最適化することになる。

図-2に参考として、ある構造に直線のロックボルトを埋め込んだ場合の概念図を示す。ここでは、構造全体の領域をパラメータ空間  $s^1$  ( $0 \leq s^1 \leq 1$ ) で表すことにすると、正規化された制御点  $p_0, p_1$  の座標は全体座標系で表した実際のロックボルトのレイアウトを決定する設計変数として定義でき、これによりロックボルトの長さを変化させることができる。このとき、 $j$  番目の制御点  $p_j$  の位置ベクトルは次のように書くことができる。

$$\mathbf{r}_j(s_{x,j}^1, s_{y,j}^1) = \mathbf{O}(\hat{x}, \hat{y}) + (s_{x,j}^1 L^x, s_{y,j}^1 L^y) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{O}$  はその構造の基準点を意味し、 $\hat{x}, \hat{y}$  はそれに対応する  $\mathbf{O}$  の全体座標である。 $L$  は構造の外郭長さ、 $L$  と  $s$  の添え字  $x, y$  はそれぞれその方向を意味する。この時、ロックボルト上の全体座標系で示した任意の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は以下で表される。

$$\mathbf{r}(\vartheta, s^1) = (1 - \vartheta) \mathbf{r}_1(s_{x,1}^1, s_{y,1}^1) + \vartheta \mathbf{r}_2(s_{x,2}^1, s_{y,2}^1) \quad (5)$$

ここで、 $\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta \leq 1$ ) は補強材の局所座標を指す。

ロックボルトの全体座標が定めれば、ロックボルトと地山の要素境界との交点座標 (全体座標系) を求め、それを再度要素の自然座標にマッピングすることで要素の剛性を計算することができる。そのため、材料形状最適化は埋込み要素の使用を前提としていることに注意する。誌面のスペースの関係上、それら一連のプロセスおよび詳細については文献<sup>12)</sup>を参照されたい。

多層材料レイアウト最適化手法は、これら2つの手法を同時に解くものであり、その解法については文献<sup>1)</sup>に詳述されているので参照されたい。

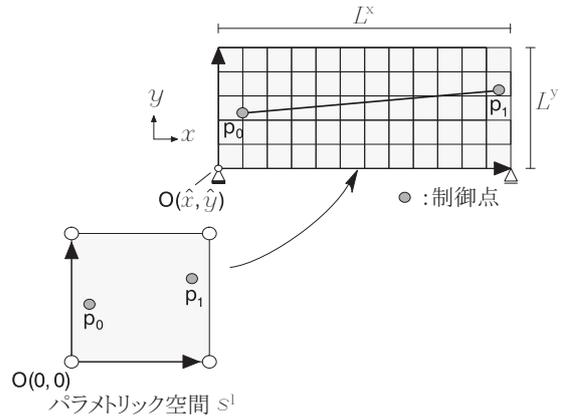


図-2 材料形状最適化を直線の補強材に応用する概念

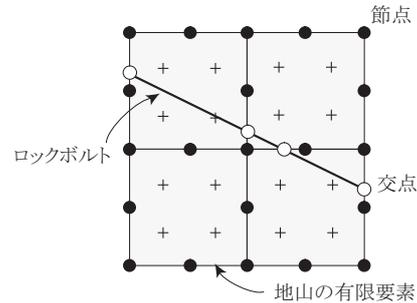


図-3 埋込み要素のパッチ

### 3. 埋込み要素

埋込み要素は、鉄筋コンクリートを対象に Phillips と Zienkiewicz<sup>7)</sup>によって開発された古くから用いられている要素である。著者の知る限り、埋込み要素をロックボルトに応用した例はないが繊維補強モルタルや地中杭など、線状の補強材を有する構造や材料に応用され、文献<sup>2)</sup>では鉄筋コンクリートを対象に実験値と比較することで埋込み要素の信頼性を検証している。

埋込み要素は、図-3に示すように補強材と基質材によって構成され、補強材の剛性を基質材のそれに重ね合わせるものである。最初に補強材の変位を基質材のそれに従い以下のように定義する。

$$u_L^b = u_L^f \quad (6)$$

ここで、 $u_L^b$  と  $u_L^f$  はそれぞれロックボルト軸上の任意の点におけるロックボルトと地山のロックボルト軸方向の変位を表している。

また、ロックボルトのひずみについては以下のように定義できる。

$$\varepsilon_L^b = \underbrace{\varepsilon_L^f}_{\mathbf{T}_1^e \varepsilon_G} \quad (7)$$

ここで、行列  $\mathbf{T}^e$  は平面応力状態の全体座標系のひずみ  $\varepsilon_G$  を局所座標系のひずみ  $\varepsilon_L$  に変換する行列であり、 $\mathbf{T}_1^e$  は  $\mathbf{T}^e$  の第1行を指す。ちなみに埋込み要素は補強材固有の有限要素および節点自由度を持たず、あくま

で基質材の要素から求められる変位やひずみを共有して補強材のそれを求める要素であり、補強材配置に関してはメッシュに依存しないことに注意されたい。また、補強材はその軸方向に1-Dで定義されており、補強材軸に直角あるいはせん断の剛性は考慮されない。

## 4. 埋込み要素を考慮した有限要素式

### 4.1 仮想仕事式

埋込み要素を用いた場合の仮想仕事を  $\delta W$  とすると、 $\delta W$  は以下のように分解することができる。

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}^r + \delta W_{\text{int}}^b - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\delta W_{\text{int}}^r$  と  $\delta W_{\text{int}}^b$  はそれぞれ地山とロックボルトの内力の仮想仕事、 $\delta W_{\text{ext}}$  は外力の仮想仕事である。式(8)をより具体的に書けば次式となる。

$$\begin{aligned} \delta W^{r+b} = & \int_{\Omega^{r+b}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega^{r+b} - \int_{\Omega^{r+b}} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{b}} \, d\Omega^{r+b} \\ & - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$  と  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は、それぞれコーシー応力テンソルおよび線形のひずみテンソルである。また、式(9)は地山とロックボルトの両方の領域を包括するものであることに注意する。さらに式(9)の内力による仮想仕事のうち、ロックボルトの部分については次式のように局所座標を使った1次元表記に簡略化できる。

$$\delta W_{\text{int}}^b = \int_{\Omega^b} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^b \boldsymbol{\sigma}_L^b \, d\Omega^b = \int_{\Omega^b} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^r \boldsymbol{\sigma}_L^b \, d\Omega^b \quad (10)$$

ここで、本研究では地山の变形を8節点四辺形要素の形状関数を用いて離散化する。

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n_r} N_k \mathbf{d}^k \quad \text{or} \quad \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (11)$$

上式の  $\mathbf{d}$  は要素の変位ベクトルである。また、ロックボルトと局所ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_L^b$  は以下のように書くことができ、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^b = \mathbf{T}_1^e \boldsymbol{\varepsilon}_G^r = \mathbf{T}_1^e \mathbf{B}^b \mathbf{d} \quad (12)$$

これらを用いて仮想仕事式(9)を離散化すると次式のように表される。

$$\begin{aligned} \delta W = & \delta W_{\text{int}}^r + \delta W_{\text{int}}^b - \delta W_{\text{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{d} \\ = & \sum_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \delta \mathbf{d}^T \left[ \underbrace{\int_{\Omega^r} \mathbf{B}^{rT} \boldsymbol{\sigma}^r \, d\Omega^r}_{\mathbf{f}_{\text{int}}^r} + \underbrace{\int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} (\mathbf{T}_1^e)^T \boldsymbol{\sigma}_L^b \, d\Omega^b}_{\mathbf{f}_{\text{int}}^b} \right. \\ & \left. - \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma}_{\mathbf{f}_{\text{ext}}} \right] = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{B}^r$  と  $\mathbf{B}^b$  は、それぞれ地山とロックボルトの  $\mathbf{B}$  マトリックス、 $\mathbf{N}$  は地山の形状関数である。なお、 $\mathbf{B}^r$  と  $\mathbf{B}^b$  は同じ関数であり、ここで敢えて区別する必要はないが、前者は地山の積分点、後者はロックボルトの積分点に関するものを意味し、この違いが後の感度の導出で異なってくるため、ここでは両者を区別している。また、 $\mathbf{f}_{\text{int}}^r$  と  $\mathbf{f}_{\text{int}}^b$  はそれぞれ地山とロックボルトの内力ベクトル、 $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  は外力ベクトルを指す。

最後に埋込み要素を用いた有限要素法の剛性方程式は以下のように整理できる。

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (14)$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \mathbf{K}^r + \mathbf{K}^b \\ = & \sum_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \left[ \int_{\Omega^r} \mathbf{B}^{rT} \mathbf{C}^r \mathbf{B}^r \, d\Omega^r + \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}_G^b \mathbf{B}^b \, d\Omega^b \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{K}$  は全体剛性マトリックス、 $\mathbf{K}^r$  と  $\mathbf{K}^b$  はそれぞれ地山とロックボルトの部分剛性マトリックス、 $\mathbf{F}$  は系全体の荷重ベクトルである。また、 $\mathbf{C}_G^b$  は全体座標系で表したロックボルトの弾性係数であり、次式で与えられる。

$$\mathbf{C}_G^b = (\mathbf{T}_1^e)^T \mathbf{C}_L^e \mathbf{T}_1^e \quad (17)$$

ちなみに式(3)で示したロックボルト軸方向の有効弾性係数  $\mathbf{C}_L$  はここでは現れないが、実際は式(15)を簡潔にするため  $\mathbf{C}_L$  を分解して式(3)内の設計変数  $s^l$  を式(15)の  $d\Omega^b$  の中に移動させており、有効弾性剛性  $\mathbf{C}_L$  を用いた場合と等価な剛性になっていることに注意されたい。

## 5. ロックボルトの最適配置問題

### 5.1 最適化問題の設定と解法手順

ここでは、ロックボルトの最適配置に対する等式制約条件付きの最適化問題を定式化する。その目的関数を  $f(\mathbf{s})$ 、等式制約条件を  $h(\mathbf{s})$  と表し、設計変数ベクトルを  $\mathbf{s}$  と表す。この  $\mathbf{s}$  は、ロックボルトの太さと長さに関する2つの設計変数ベクトル  $\mathbf{s}^t$  と  $\mathbf{s}^l$  を1列に並べたものである。 $\mathbf{s}^t$  はロックボルト毎に1つ設定し、補強材太さは補強材の軸方向に沿って変化しないものとする。以下では特に明記する必要がない限り、設計変数を簡便的に  $\mathbf{s}$  を使って表すこととする。

本研究では、構造全体で使用するロックボルト体積が一定の条件下で、地山とロックボルトを含む地山構造物全体の剛性を最大化する。一般に構造の剛性を目的関数とする最大化問題は、ひずみエネルギー最小化問題と力学的に等価であるとして扱われる。このアプローチは、ある荷重に対して構造全体の剛性を平均的に向上させるものであるが、特定の場所の変位を小さくするような剛性最大化を意図するものではない。しかし、例えばトンネル掘削工事においてはトンネル天

端や側壁に想定以上の大きな変形が生じることも多く、その場合、その変形を最優先に小さく抑えるロックボルト配置を決定しなければならない。

このような例に対しては、変形の著しい箇所を構造解析上の変位制御点に設定し、それに対してひずみエネルギーを最大にするロックボルト配置を見つけることで、間接的に構造物全体の剛性を最大化することができる。

本研究では上記を勘案し、変位制御点の変位成分に対するひずみエネルギー最大化、すなわち後者のアプローチを用いる。以下に本研究における最適化モデルを記す。

$$\text{minimize } f(s) = - \int_{\Omega^{r+b}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega^{r+b} \quad (18)$$

$$\text{subject to } h(s) = \sum_{m=1}^{n_{\text{ele}}^b} \int_{\Omega_{\xi}^b} \underbrace{|\mathbf{J}^b|}_{s^t r_0 l} d\Omega_{\xi}^b - \hat{V} = 0 \quad (19)$$

$$s_L^i \leq s_i^t \leq s_U^i \quad i = 1, \dots, n_s \quad (20)$$

$$s_L^i \leq s_i^l \leq s_U^i \quad i = 1, \dots, n_s \quad (21)$$

ここで、 $\xi$ は自然座標空間、 $|\mathbf{J}^b|$ はロックボルトのヤコビ行列の行列式である。 $r_0$ は前述のロックボルト最大太さを意味し、長さ方向に一定とした。 $l$ は、埋込み要素内の1本のロックボルト直線長さで設計変数 $s^l$ に依存する。 $\hat{V}$ は予め決められた構造全体のロックボルト総体積、 $s_L$ と $s_U$ は設計変数の下限と上限値、 $n_s$ は設計変数の数を意味する。また、 $n_{\text{ele}}^b$ はロックボルトを有する地山の要素総数であり、最適化の過程でロックボルト長や位置が変わるとそれに合わせて変化する。

なお、最適化問題は一般に目的関数を最小化するように設定するため、式(18)ではひずみエネルギーにマイナスを乗じることで最小化問題に変換している。

ここで参考として本研究で扱う最適化問題の解法手順を図-4に示す。本研究では勾配法による最適化アルゴリズムを用いるため、構造解析後に目的関数と制約関数の設計変数 $s$ に関する感度 $\nabla_s f$ 、 $\nabla_s h$ を求める必要がある。ここで得られた感度を最適化アルゴリズム(MMA)へ組み込み、その時点での最適解を求め、その解が収束するまで繰り返し計算を行う。次節では本研究で用いた目的関数と制約関数の感度導出法について説明する。

## 5.2 感度の導出

### (1) 目的関数の感度

本研究における目的関数 $f$ は設計変数 $s$ だけでなく変位 $d$ に依存し、さらにその変位 $d$ も設計変数 $s$ に依存する。これより、目的関数 $f = f(s, d)$ の設計変数 $s$ による偏微分は、連鎖律により以下ようになる。

$$\begin{aligned} \nabla f(s, d) &= \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial s} \\ &= \nabla_s^{\text{ex}} f + \nabla_d f^T \nabla_s d \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $\nabla_s^{\text{ex}}(\bullet)$ は陽的に直接求められる微分項であることを意味する。ところで節点変位ベクトル $d$ は構造

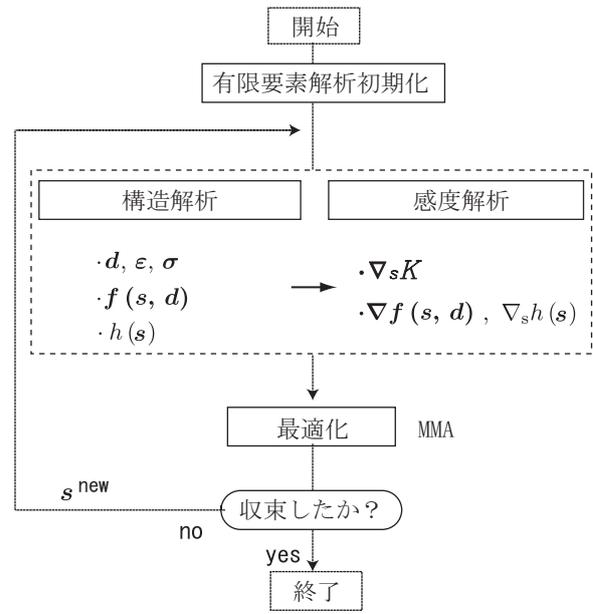


図-4 当該最適化問題の解法手順

解析における未知数であり、その微分 $\nabla_s d$ を直接求めることができない。そこで、力のつり合い条件である仮想仕事式(13)を設計変数 $s$ で微分し、その関係式を用いることで間接的に $\nabla_s d$ を求めることとする。本最適化問題は線形の比較的単純な問題であり、その関係式を応用することで $\nabla_s d$ の項は消去され、最終的に以下の簡単な感度式が導かれる。

$$\nabla f = -d^T \nabla_s K d \quad (23)$$

この式から分かる通り、微分項は陽的に直接求めることができる $\nabla_s K$ だけであり、容易に目的関数の感度を計算できる。式(23)に至る過程については付録Iに詳述されているのでそれを参考にされたい。

### (2) 等式制約条件の感度

本研究における等式制約条件式(19)は、変位 $d$ に依存しないため、設計変数 $s$ での微分は

$$\nabla_s h = \frac{dh(s)}{ds} \quad (24)$$

となる。これは陽的に直接求まる微分であり、制約関数の感度は次式により求められる。

$$\nabla_s h = \sum_{m=1}^{n_{\text{ele}}^b} \int_{\Omega_{\xi}^b} (\nabla_s |\mathbf{J}^b|) d\Omega_{\xi}^b \quad (25)$$

## 6. 最適化計算例

本節では NATM 工法および法面補強問題を対象に、提案するロックボルト最適配置手法を適用して地山とロックボルトを含む構造全体の剛性を最大にする問題への適用性を検証する。

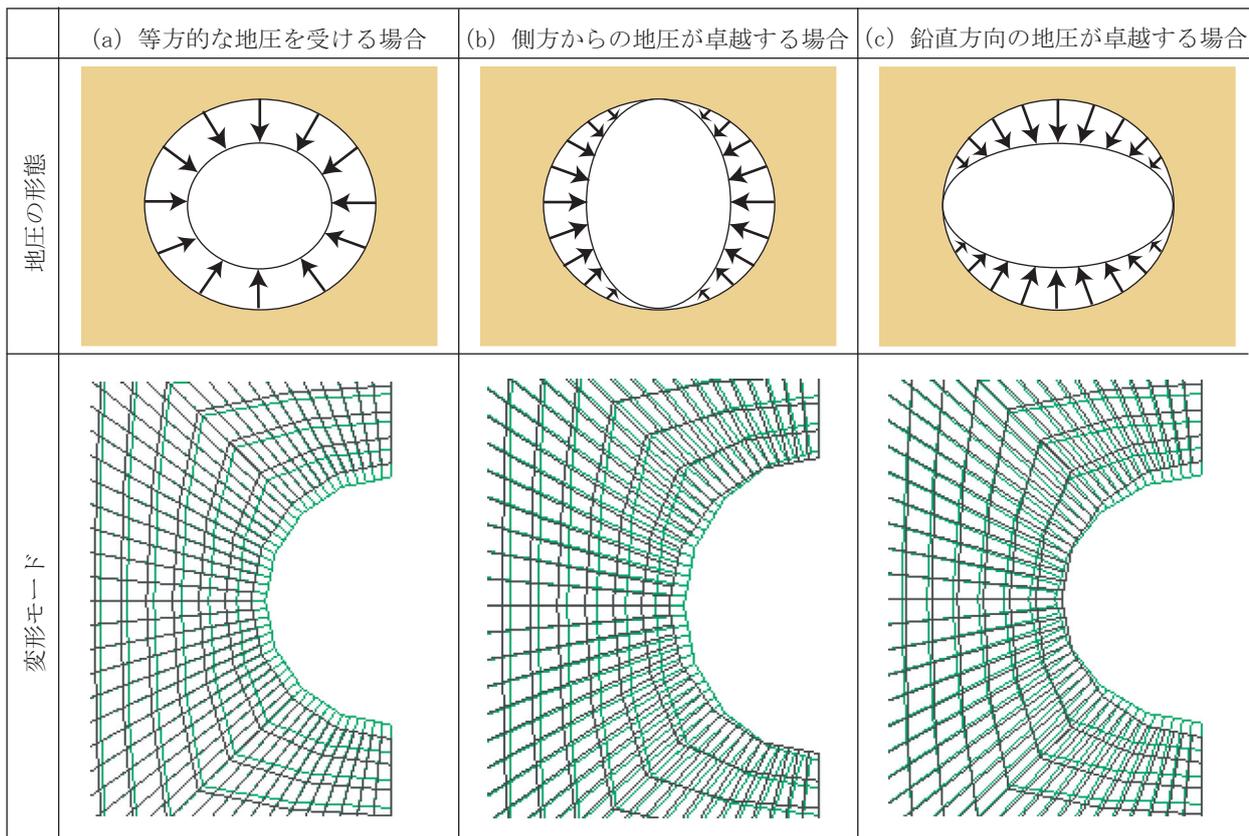


図-5 想定する地圧の形態と無補強時における掘削部のメッシュ（黒）および変形モード（緑）：(a) 等方的な地圧を受ける場合、(b) 側方の地圧が卓越する場合、(c) 鉛直方向の地圧が卓越する場合

## 6.1 NATM工法のロックボルト配置の最適化

### (1) 解析条件

本最適化計算例ではトンネルが地中深くにある場合を想定し、その中で図-5 上段に示すような等方的な地圧を受ける場合と側方および鉛直方向の地圧が卓越する場合の合計3つの荷重ケースについて最適化を行った。

図-6は想定する構造モデルを示している。この計算例では、簡単のため円形のトンネル掘削断面を採用し、有限要素で離散化した後は多角形の掘削断面となっている。使用材料はすべて線形モデルとし、その材料定数を表-1に記す。埋込み要素は8節点四辺形要素を用いた。なお、構造モデルの対称性を考慮すると1/4断面を使った解析で十分であるが本論文の中では紹介されていない、土被りが小さいケース（この場合は地表面の鉛直方向を可動支持に設定）を想定した最適化計算も別途実施しており、それとの比較のために半断面で解析を実施している。また、現実的には下向きロックボルトの打設実績は少ないものの、他と同様にモデル化した。

最適化前のロックボルト配置は標準支保パターンとし、すべてのロックボルト長さを8000mm、太さを25mmとして設定した。ロックボルト太さについては下限を0mm、上限を50mmとし、結果として太さを表す設計変数 $s^t$ の初期値は0.5となる。

ロックボルト長さについては、トンネル側のロックボルト端点をトンネル掘削面上に固定し、もう一方の

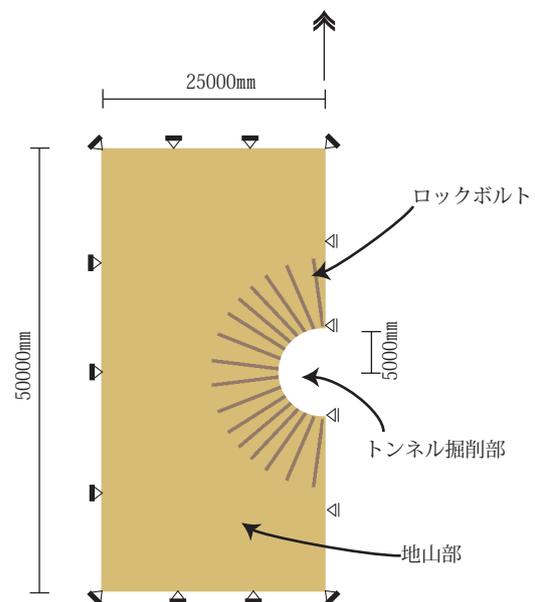


図-6 構造モデル

端点をロックボルト軸方向に動かすことでその長さを変化させる。ここで、ロックボルト先端の座標を2次元的に変化させることも可能であるが、その場合、ロックボルトの打設角度も同時に変化し最適化途中でロッ

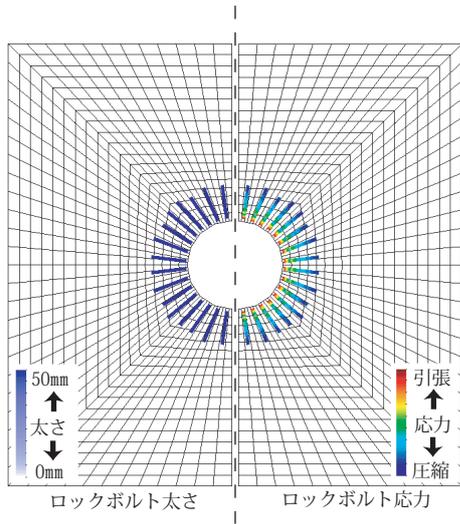


図-7 等方的な地圧を受ける場合の最適化計算結果

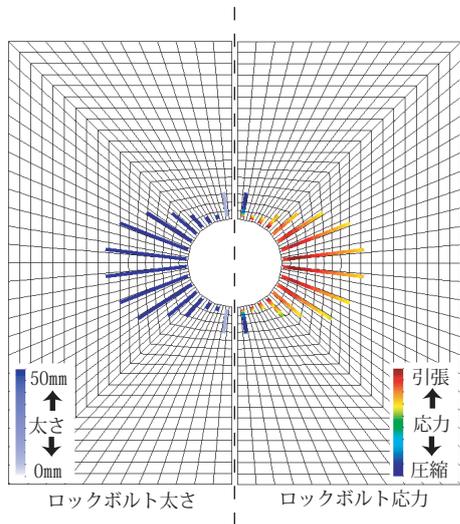


図-8 側方地圧が卓越する場合の最適化計算結果

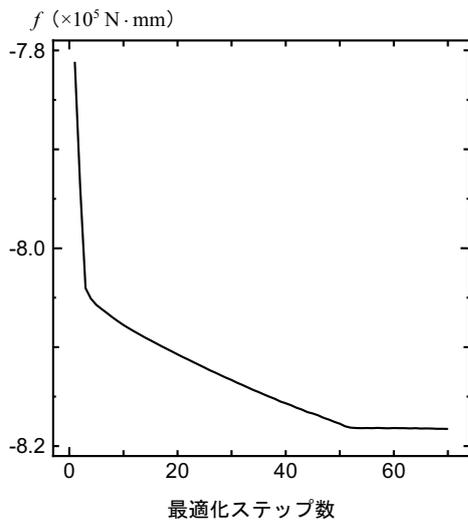


図-9 目的関数値の変化

表-1 NATM 工法: 材料データ

	ヤング係数 (N/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比
ロックボルト	240000	0.2
地山部	50000	0.25

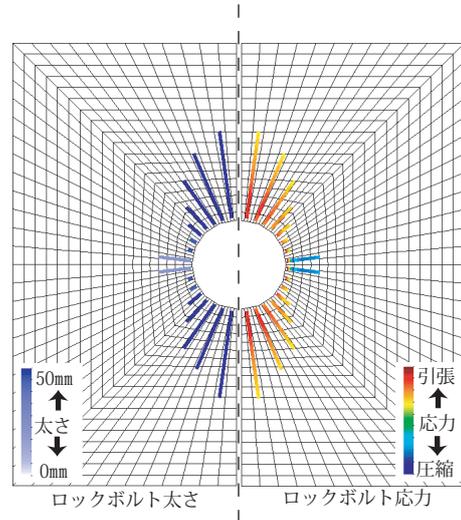


図-10 鉛直方向の地圧が卓越する場合の最適化計算結果

クボルトどうしが平面交差をする可能性が生じる。これを避けるために本計算例では最初に設定された打設角度を変化させないものとした。ロックボルト長さを定義する  $s^l$  のパラメトリック空間の基準点  $O$  については、図-6 左下のコーナーに設定した。また、等式制約条件で示したとおり、ロックボルトの総体積は最適化計算途中で変化しない。

NATM 工法は周辺地盤の緩みを許容する工法で本来は塑性計算を考慮しないと適切なモデル化を行うことは困難であるがここでは簡便的にトンネル掘削後に生じる地圧応力の解放を想定して、トンネル掘削面内側に図-5 上段に示すような3種の表面荷重を水平もしくは鉛直方向斜影の線荷重 (10N/mm) として与えた。以下にこれらの条件下で実施した、異なる地圧3ケースに対する最適化計算結果を記す。

## (2) 等方的な地圧を受ける場合

図-7 は、掘削面に等方的な地圧を受ける場合の最適化結果である。同図左側は最適化後のロックボルト配置を、右側はそのロックボルトの軸方向応力を表している。また、本計算例では掘削面天端  $(x,y) = (25000, 30000)$  における鉛直下向きの変位成分に対する剛性最大化を図った。また、図-5 (a) 下段はロックボルト無補強時における変形モードを示したものである。両図から明らかのように、トンネル掘削面付近で均等に高い応力が生じ、その箇所を補強するようにトンネル中心に向かって太く短いロックボルトが放射状に配置された。ロックボルトの太さはすべて最大の 50mm に達している。ここで、ロックボルト長に若干の差が見られるがこれは矩形である解析領域の影響によるものである。得られた結果は標準支保パターンと同様なレイアウトとなり、

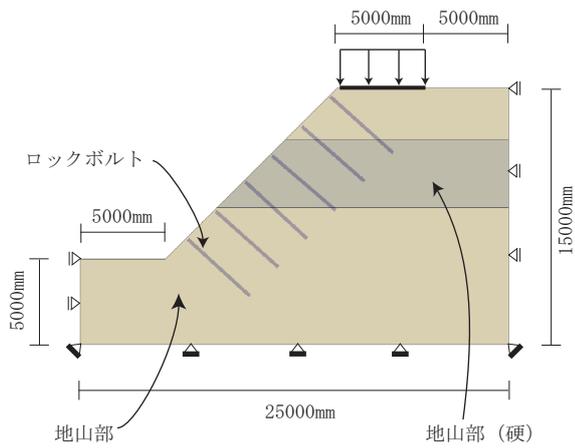


図-11 法面補強の構造モデル

表-2 法面補強: 材料データ

	ヤング係数 (N/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比
ロックボルト	240000	0.2
地山部	50000	0.25
地山部 (硬)	75000	0.25

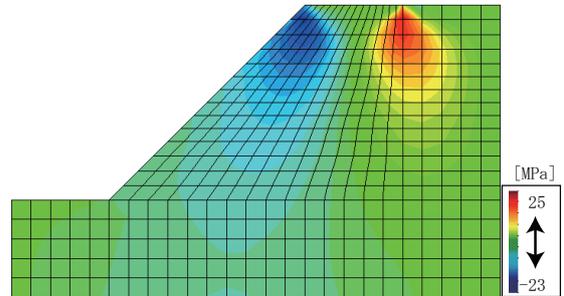


図-12 無補強時の地山のせん断応力分布

想定どおり標準支保パターンは等方的な地圧に対して有効であることが確認できた。

### (3) 側方の地圧が卓越する場合

側方から大きな地圧を受ける場合、図-5 (b) 下段に示すようにトンネル幅が狭くなるような変形モードを示す。そのため、ここではトンネル掘削面左側中心点  $(x,y) = (20000, 25000)$  を変位制御点と設定し、その水平右向きの変位成分に対して剛性を最大にするようなロックボルト配置を計算した。図-8 はその最適化結果を示している。また、図-9 は最適化計算途中の目的関数値の変化を示しており、最適化計算直後に急激にその関数値が減少し最適化計算回数が増すにつれ、ある一定値に収束していく様子が分かる。

なお、本論文の計算例においてはロックボルトの体積が地山のそれに比べて極めて小さいため地山とロックボルトを含むひずみエネルギーの総和は地山によるものが支配的となる。その結果、ひずみエネルギーの総和自体には大きな変化こそ見られないものの力学的には合理的なロックボルト配置を与えていることがわかる。

### (4) 鉛直方向の地圧が卓越する場合

鉛直方向から大きな地圧を受ける場合、図-5 (c) 下段に示すようにトンネル内空高さが小さくなるような変形モードを示す。ここではトンネル掘削面天端  $(x,y) = (25000, 30000)$  における鉛直下向きの変位成分に対する剛性最大化を図った。図-10 はその最適化結果である。得られた結果は前項の最適化計算例と地圧の方向が違うだけの同様の結果であり特に新しい成果を示すものではないが提案する多層材料レイアウト最適化の一連のアルゴリズムが地圧の方向を変えても同様の最適解を安定的に与えるという点で本手法の信頼性を確認することができた。

以上より、多層材料レイアウト最適化手法に基づくロックボルト最適配置手法は、異方的な地圧状態にあるトンネルに対し、それに即した最適なロックボルト配置を与えることが検証された。

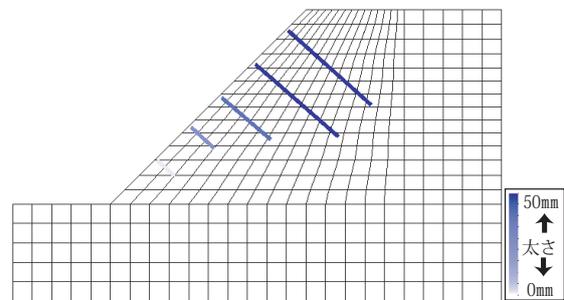


図-13 最適化後のロックボルト太さ

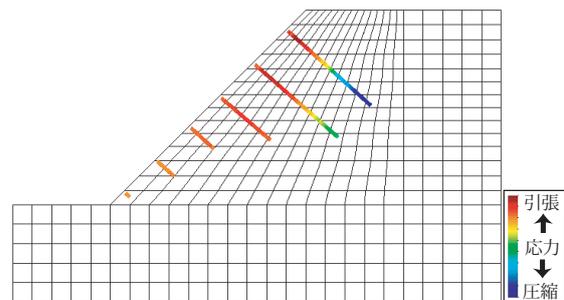


図-14 最適化後のロックボルト軸応力

## 6.2 法面補強のためのロックボルト配置の最適化

### (1) 解析条件

本節では法面補強で使用されるロックボルトを対象にその配置を最適化することで構造全体の剛性を最大にする問題を考える。図-11 は、本節で用いる法面補強の構造モデルである。ここでは比較的硬い層を挟む合計3層の水平な地層構成を想定し、本来考慮すべき地山の塑性化については考慮していない。

線荷重 1kN/mm の上載荷重を与え、法面に対し垂直に6本のロックボルトが打設されている初期配置を想

定する。使用材料は前節と同様にすべて線形材料モデルとし、その材料定数を表-2に記す。ロックボルト長さおよび太さの初期値は3400mmおよび25mmとして設定した。また、ロックボルト太さの下限値については0mm、上限値を50mmとし、ロックボルト長さについてはロックボルトの片側端点を法面上に固定し、他方をロックボルト軸方向に動かすことでその長さを変化させた。ロックボルト長さの上限値は、施工面を考慮して6000mmとした。

図-12は、ロックボルトによる補強を行っていない状況での地山のせん断応力分布である。また、図-13、図-14は、それぞれ得られたロックボルト配置と軸応力である。

ここでは、図-12で示されるように法面上側に応力が集中しており、それを補強するように上位2段のロックボルトがその最大太さ50mm、長さもその上限値に達した。また、3、4段目については発生応力の大きさに準ずる形で長さに変化が見られた。一方、下位2段のロックボルトは太さがゼロとなったことで、ロックボルトの本数が減少する結果となった。これより、本手法は理想化された条件下ではあるが、力学的に理にかなうロックボルト配置を与えることが示された。

## 7. 結論

本研究は、NATM工法と法面補強で用いるロックボルト支保工を対象に、多層材料レイアウト最適化手法を応用することでその地山構造全体の剛性を最大にし、従来から使用されている標準支保パターンとの差異を確認しながら本手法の適用可能性について考察を行った。

以下に本研究の成果を記す。

- 従来のひずみエネルギー最小化とは異なり、本研究では指定された箇所の変位に対するひずみエネルギー最大化を行うことでその構造の剛性を最大にする方法を定式化した。これにより、例えばトンネルの現場で実際に起こりえる想定外の大きな変形が坑内のある箇所で確認された場合でもそれを優先的に最大限抑制できる最適なロックボルト配置を決定することができる。
  - 最適化計算例ではいずれの場合も力学的に理にかなう最適化構造が得られた。また、ロックボルト長さの上限に施工上の制限を与えた場合においても同様に良好な結果が得られた。上述の成果も含め、本手法は実設計への適用可能性を十分に持ち得ることが確認できた。
- 一方、今後の課題として以下が挙げられる。
- 地盤材料は実際には非常に複雑な挙動を示すため、より現実的なロックボルト配置を求めるならば材料非線形特性を考慮した最適化問題に拡張することが必要である。
  - ロックボルトは本来、引張材として使用されるべきであるがひずみエネルギーを基本する目的関数を用いた場合、圧縮と引張りは区別なく同等に扱われてしまう。そのため、ロックボルトの圧縮応力による影響を除外できる最適化問題を定式化することができればより効率的なロックボルト配置

を得ることができると考えられる。

## 謝辞

本研究はドイツ Stuttgart 大学で開発された解析プログラム CCARAT を一部利用しており、その協力に対し心より感謝を申し上げます。

## I. 目的関数の感度

ここでは式(23)で示される目的関数  $f(s)$  の設計変数  $s$  に対する感度  $\nabla f$  を導出する。なお、式の煩雑さを避けるためにここでは設計変数を  $s = \{s^t \cup s^l\}$ 、また、 $T \equiv T^e$  として記述する。最初に応力-ひずみ関係を用いて式(18)を以下のように書きなおす。

$$f(s) = - \int_{\Omega^{+b}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{C}_G \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega^{+b} \quad (\text{I.1})$$

ここで、 $\mathbb{C}_G$  は全体座標系での線形材料剛性マトリックスである。式(I.1)を各材料に分けて書くと以下となる。

$$f(s) = - \int_{\Omega^b} \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \mathbb{C}_G^b \boldsymbol{\varepsilon}^b d\Omega^b - \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\varepsilon}^{rT} \mathbb{C}^r \boldsymbol{\varepsilon}^r d\Omega^r \quad (\text{I.2})$$

$\mathbb{C}_G^b$  は、ロックボルトの全体座標系で示した材料剛性マトリックスである。そこで、式(I.2)の第1項のみを取り出して設計変数  $s$  で微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \nabla_s \left( \int_{\Omega^b} \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \mathbb{C}_G^b \boldsymbol{\varepsilon}^b d\Omega^b \right) \\ &= \int_{\Omega^b} \left( \nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \right) \mathbb{C}_G^b \boldsymbol{\varepsilon}^b d\Omega^b + \int_{\Omega^b} \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \left( \nabla_s \mathbb{C}_G^b \right) \boldsymbol{\varepsilon}^b d\Omega^b \\ &+ \int_{\Omega^b} \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \mathbb{C}_G^b \left( \nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}^b \right) d\Omega^b + \int_{\Omega^b} \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \mathbb{C}_G^b \boldsymbol{\varepsilon}^b \left( \nabla_s d\Omega^b \right) \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}^b = \mathbf{B}^b \mathbf{d}$  の関係を用いて、式(I.3)を以下のように整理する。

$$\begin{aligned} \nabla_s \left( \int_{\Omega^b} \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \mathbb{C}_G^b \boldsymbol{\varepsilon}^b d\Omega^b \right) &= \int_{\Omega^b} \mathbf{d}^T \left( \nabla_s \mathbf{B}^{bT} \right) \mathbb{C}_G^b \mathbf{B}^b \mathbf{d} d\Omega^b \\ &+ \int_{\Omega^b} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{bT} \left( \nabla_s \mathbb{C}_G^b \right) \mathbf{B}^b \mathbf{d} d\Omega^b \\ &+ \int_{\Omega^b} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{bT} \mathbb{C}_G^b \left( \nabla_s \mathbf{B}^b \right) \mathbf{d} d\Omega^b \\ &+ 2 \int_{\Omega^b} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{bT} \mathbb{C}_G^b \mathbf{B}^b \left( \nabla_s \mathbf{d} \right) d\Omega^b \\ &+ \int_{\Omega^b} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{bT} \mathbb{C}_G^b \mathbf{B}^b \mathbf{d} \left( \nabla_s d\Omega^b \right) \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

次に式 (I.2) の第 2 項を設計変数  $s$  で微分する。この場合、地山の  $\mathbf{B}^r$ ,  $\mathbf{C}^r$ ,  $d\Omega^r$  は設計変数  $s$  に依存しないためこれらの微分項はゼロとなり、以下ようになる。

$$\nabla_s \left( \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\varepsilon}^{rT} \mathbf{C}^r \boldsymbol{\varepsilon}^r d\Omega^r \right) = 2 \int_{\Omega^r} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{rT} \mathbf{C}_G^r \mathbf{B}^r (\nabla_s \mathbf{d}) d\Omega^r \quad (\text{I.5})$$

ただし、式 (I.4), (I.5) の  $\nabla_s \mathbf{d}$  については直接陽的に求めることができない。そのため、式 (13) の仮想仕事式を使って  $\nabla_s \mathbf{d}$  を間接的に求める方法をとる。

まず、式 (13) 全体を設計変数  $s$  で微分するが、本研究では表面ベクトル  $\hat{\mathbf{i}}$  は設計変数  $s$  に依存しないと仮定し、また仮想変位  $\delta \mathbf{d}$  は任意であるため、 $s$  に依存しないものと考えてよい。これより、式 (13) を設計変数  $s$  に関して微分すると以下となる。

$$\nabla_s \left( \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}_G^b \mathbf{B}^b d\Omega^b + \int_{\Omega^r} \mathbf{B}^{rT} \mathbf{C}_G^r \mathbf{B}^r d\Omega^r \right) = 0 \quad (\text{I.6})$$

上式を順番に展開し、 $\nabla_s \mathbf{d}$  を含む項を左辺に、その他を右辺に移項して整理すると以下となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}_G^b \mathbf{B}^b d\Omega^b (\nabla_s \mathbf{d}) + \int_{\Omega^r} \mathbf{B}^{rT} \mathbf{C}_G^r \mathbf{B}^r d\Omega^r (\nabla_s \mathbf{d}) \\ = & - \int_{\Omega^b} (\nabla_s \mathbf{B}^{bT}) \mathbf{C}_G^b \mathbf{B}^b d\Omega^b - \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} (\nabla_s \mathbf{C}_G^b) \mathbf{B}^b d\Omega^b \\ & - \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}_G^b (\nabla_s \mathbf{B}^b) d\Omega^b - \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}_G^b \mathbf{B}^b d(\nabla_s d\Omega^b) \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

式 (I.2) の感度  $\nabla f$  を求めるために個別に求めた式 (I.4) と式 (I.5) を足し合わせ、それに式 (I.7) を代入すると以下のように整理できる。

$$\begin{aligned} \nabla_s f = & - \mathbf{d}^T \int_{\Omega^b} (\nabla_s \mathbf{B}^{bT}) \mathbf{C}_G^b \mathbf{B}^b d\Omega^b d \\ & - \mathbf{d}^T \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} (\nabla_s \mathbf{C}_G^b) \mathbf{B}^b d\Omega^b d \\ & - \mathbf{d}^T \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}_G^b (\nabla_s \mathbf{B}^b) d\Omega^b d \\ & - \mathbf{d}^T \int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}_G^b \mathbf{B}^b (\nabla_s d\Omega^b) d \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

$\int_{\Omega^b} \mathbf{B}^{bT} \mathbf{C}_G^b \mathbf{B}^b d\Omega^b$  は、式 (15) で示したロックボルトの剛性行列  $\mathbf{K}^b$  であるから、目的関数の感度は以下のような簡単な式で書くことができる。

$$\nabla_s f = -\mathbf{d}^T (\nabla_s \mathbf{K}^b) \mathbf{d} \quad (\text{I.9})$$

$$= -\mathbf{d}^T \nabla_s \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (\text{I.10})$$

ここで、上式で  $\nabla_s \mathbf{K}^b$  を敢えて  $\nabla_s \mathbf{K}$  に置き換えたのは、構造解析で各埋め込み要素の剛性行列をアセンブリン

グして全体剛性行列  $\mathbf{K}$  を構築するプログラムを単に利用するためである。もちろん、式 (15) で紹介した地山の部分剛性行列の設計変数に関する微分は  $\nabla_s \mathbf{K}^r = \mathbf{0}$  であり、上式で得られる感度に影響を与えない。

#### 参考文献

- 1) Kato, J.: *Material optimization for fiber reinforced composites applying a damage formulation*, Ph.D. dissertation, Institute of Structural Mechanics, University of Stuttgart, Germany, 2010.
- 2) Balakrishnan, S., Murray, D.W.: Finite element prediction of reinforced concrete behavior, *Structural Engineering Report*, No. 138, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 1986.
- 3) Barzegar, F., Maddipudi, S.: Generating reinforcement in FE modeling of concrete structures, *J. Struct. Eng.*, 120, (5), pp. 1656–1662, 1994.
- 4) Chang, T.Y., Taniguchi, H., Chen, W.F.: Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete panels, *J. Struct. Eng.*, ASCE 113 (1), pp. 122–140, 1987.
- 5) Elwi, A.E., Hudey, T.M.: Finite element model for curved embedded reinforcement, *J. Eng. Mech.*, 115, (4), pp. 740–754, 1989.
- 6) Hofstetter, G., Mang, H.A.: Work-equivalent node forces from prestress of concrete shells, In: *Finite element methods for plate and shell structures, formulations and algorithms*, vol. 2. (eds. Hughes T.J.R., Hinton E.) Swansea, Pineridge Press, pp. 312–347, 1986.
- 7) Phillips, D.V., Zienkiewicz, O.C.: Finite element nonlinear analysis of concrete structures, In: *Proc. Inst. Civ. Engrs.*, Part 2, 61, (3), pp. 59–88, 1976.
- 8) Svanberg, K.: The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, pp. 359–373, 1987
- 9) Svanberg, K.: A globally convergent version of MMA without linesearch In: *Proceedings of the First World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO-1*, (eds. Olhoff N. & Rozvany G.I.N.), Goslar, Germany, pp. 9–16, 1995
- 10) Svanberg, K.: A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations, *SIAM J. Optim.*, 12, 2, pp. 555–573, 2002
- 11) Kato, J., Lipka, A., Ramm, E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, *Struct. Multidisc. Optim.*, 39, pp. 63–81, 2009.
- 12) Kato, J., Ramm, E.: Optimization of fiber geometry for fiber reinforced composites considering damage, *Finite. Elem. Anal. Des.*, 46, pp. 401–415, 2010.
- 13) Stolpe, M., Stegmann, J.: A Newton method for solving continuous multiple material minimum compliance problems, *Struct. Multidisc. Optim.*, 35, pp. 93–106, 2008.

(2011年3月8日)