

# 繊維複合材料のひずみ軟化を考慮した 多層材料最適化手法の提案

加藤 準治<sup>1</sup>・Ekkehard RAMM<sup>2</sup>・寺田 賢二郎<sup>3</sup>・京谷 孝史<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 東北大学助教 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字 6-6-06)  
E-mail: jkato@civil.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>Professor, University of Stuttgart (Pfaffenwaldring 7, 70569 Stuttgart, Germany)

<sup>3</sup>正会員 東北大学准教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字 6-6-06)

<sup>4</sup>正会員 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字 6-6-06)

本研究は、繊維強化複合材料、特に繊維補強コンクリート (FRC) を用いた材料最適化手法を提案する。FRC は、通常の鉄筋コンクリートに比べ板厚を極めて薄くできるという優れた長所があるものの、力学的挙動が複雑で一旦損傷が起きると急激に耐荷力が低下するという問題がある。そのため、本研究は FRC の損傷後においても耐荷力を安定的に保持できるような構造に改善することを意図し、それを可能にする構造最適化手法の提案を行う。ここで提案する手法は、単一材料を対象にした一般的なトポロジー最適化の概念を複合材料に応用し、さらに構成材料の材料非線形性を考慮するものである。ここではいくつかの数値解析例を用いて、本手法が繊維複合材料の耐荷力を安定的に保持できる構造に改善することを確認した。

**Key Words :** multiphase material optimization, material nonlinearity, fiber reinforced composites

## 1. はじめに

繊維強化プラスチックをはじめとする繊維強化複合材料は、軽量かつ高強度という優れた性質から様々な分野で使用され、現在も用途に応じて多種多様な複合材料の開発が進められている。土木建築分野では、繊維補強コンクリート (Textile Fiber Reinforced Concrete: 以下、FRC) が代表的な建材として利用されている。FRC は、ガラス、カーボン、アラミド繊維等のフィラメントを束ね、高強度モルタルの中にそれを平行、もしくはメッシュ状に配置したものである。ガラス繊維は、モルタル (以下では便宜上、コンクリートと呼ぶ) 内でアルカリ反応を起こすため、通常、抗アルカリ反応の AR-glass 繊維 (Alkali-Resistance glass) が用いられる。また、繊維束はエポキシ樹脂等で充填接着することで繊維束内のフィラメントの滑りを極力抑えるように工夫されることが多い。FRC は、繊維材の腐食の心配がないため、コンクリートによる厚いかぶりが不要、結果的に薄肉軽量の複合構造を可能にするとして注目されている。

一方、コンクリートと繊維材は、ともに脆性的な破壊挙動を示すため、FRC 構造自体も同様の破壊挙動を示し、損傷後の耐荷力が急激に低下するという問題がある。FRC を建設材料の構造主部材として使用するためには、損傷した後でも耐荷力が急減に低下しない、エネルギー吸収力のある構造に改善することが必要である。

しかし、FRC の破壊メカニズムは、繊維束内のフィ

ラメント間や繊維材-マトリックス間の界面挙動、繊維材の長さ、太さ、種類、ミクロレベルにおける界面の粗さや充填剤の特性等の多くのパラメータに強く依存することが報告されており<sup>11),12),13)</sup>、経験的手法によってこれらのパラメータを変化させ、損傷後の FRC の構造挙動を制御することは困難である。

この種の問題を解く数理的な方法の 1 つとして、構造最適化手法がある。構造最適化手法は、設計においてパワフルなツールとして航空宇宙、自動車産業をはじめとする様々な分野で活用され、今後も更なる研究開発が期待されている。構造最適化手法を用いることにより、例えば構造軽量化、剛性最大化、座屈荷重最大化等、経験的手法では解決できない高度な問題に対しても、妥当な解を得ることが可能となる。

しかしながら、構造最適化は数学的に複雑なプロセスを要し、また、構造解析に加え、最適化の反復計算を実行するため、数値計算量が多くなる。このような背景から、構造最適化に関する研究の多くは線形弾性域で単一材料からなる単純な構造に限定した問題を対象とし、本研究のような複合材料及びその材料非線形性の両方を考慮した最適化の研究は殆ど報告されていない。

材料非線形性を考慮した構造最適化の研究では、例えば、Yuge, Kikuchi<sup>32)</sup>、Maute ら<sup>17)</sup>が塑性材料モデル、Bugeda ら<sup>4)</sup>は損傷材料モデルを考慮した最適化手法を紹介しているが、いずれも単一材料を対象とした

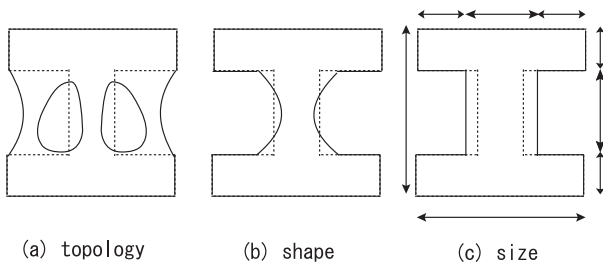


図-1 構造最適化の分類: (a) トポロジー最適化, (b) 形状最適化, (c) 寸法最適化

研究報告である。一方、複合材料を対象とした構造最適化の研究は、繊維複合材料の繊維材の最適方向角を決定する問題(例えば文献<sup>7),29)</sup>や構成材料の最適配置を決定する問題(文献<sup>5),28)</sup>が報告されているが、その殆どが線形弾性域を対象としたものがある。複合材料と材料非線形性の両方を考慮した最適化手法に関する研究は、著者らが知る限り、Swan, Kosaka らの研究グループが行った、古典的な Voigt-Reuss 混合式を用いたトポロジー最適化の研究報告<sup>30)</sup>しか見当たらない。

本研究は、FRC が損傷した後も安定的に耐荷力を保持し続けるような構造に改善することを意図し、繊維強化複合材料の材料非線形性を考慮した新しい構造最適化手法を提案する。具体的には、繊維材の太さと長さを設計変数とし、FRC の構造解析で得られる荷重-変位曲線下側の面積(吸収エネルギー)を最大化するための最適化問題を定式化する。ここではいくつかの数値計算例を用いて本手法の妥当性を検証する。

なお、本論文では、耐荷力を安定的に最大限保持することを FRC のエネルギー吸収力最大化と呼ぶことにする。また、ここで提案する手法は、単一材料のトポロジー最適化手法の概念を複合材料に応用し、それを等方性の損傷力学モデルに拡張したものである。本論文では便宜上、これを多層材料最適化手法と呼ぶこととし、他の類似の手法と区別した。

## 2. 多層材料最適化の概要

### (1) 構造最適化の分類

構造最適化は、一般に図-1 に示す 3 つに分類することができる。トポロジー最適化は、最も基本となる構造の位相を、形状最適化はトポロジーを変化させずにその構造の境界部の形状を、また、寸法最適化は文字どおり、部材等の最適寸法を決定するものである。これらは、いずれも構造の幾何に関するものである。

一方でこれらとは別に材料最適化がある。これは、最適な材料の種類を決定したり、例えば繊維強化複合材料の場合では、繊維材の最適角度を取り扱うものであ

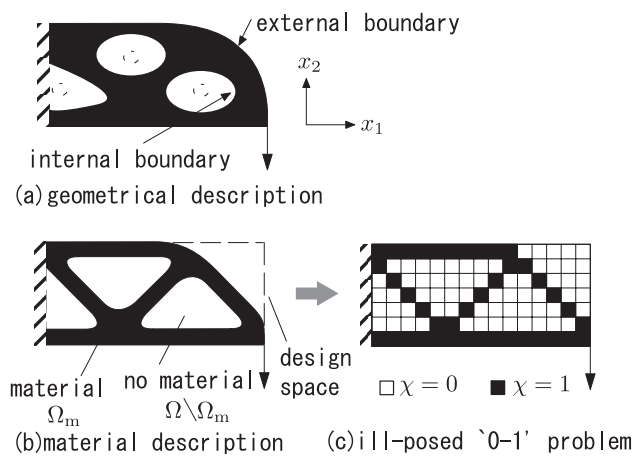


図-2 トポロジー最適化: (a) 幾何学的表現法, (b) 材料表現法, (c) 有限要素で離散化した '0-1' 整数値問題となる材料表現法

る。材料最適化は、設計変数の定義如何によつては、上記 3 つの手法を応用することで構造最適化問題として扱うことが可能である。本研究では、トポロジー最適化の概念を拡張して材料最適化を行うため、次節ではトポロジー最適化の概略を述べる。

### (2) トポロジー最適化と正則化

トポロジー最適化は、図-2 (a),(b) に示すように幾何学的表現法と材料表現法に区分できる。前者は、ある構造の内外境界部を変化させることで構造全体の最適な位相を決定するものである。この方法は、構造境界部の滑らかな形状を明確に表わすことができるという長所があり、近年では幾何学表現として、level-set 法、トポロジカルデリバティブと呼ばれる方法を用いたトポロジー最適化の研究が盛んである。しかし、この表現法は幾何学の特殊な知識を必要とするため、一般には後者の材料表現法を用いることが多い。

材料表現法は、設計空間において、任意の点  $\mathbf{x}$  が材料の存在する領域 ( $\Omega_m$ ) に位置するか否かでその位相を決定する方法である。指示関数  $\chi(\mathbf{x})$  を用いてそれを表すと以下のように書ける。

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{no material} & : \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_m \\ 1 & \rightarrow \text{material} & : \forall \mathbf{x} \in \Omega_m \end{cases} \quad (1)$$

この方法は、通常、同図 (c) のように一般的な有限要素で離散化するため境界部がジグザグ形状になる等の問題もあるが、扱い易いのが特徴である。しかし、この手法は '0-1' 整数値問題と呼ばれる、解の一意性と安定性に欠く不良設定問題 (ill-posedness) となる。そこで、不連続な '0-1' 間に領域を設けて、そこでの指示関数値が中間的な値となるように内挿近似し、これ

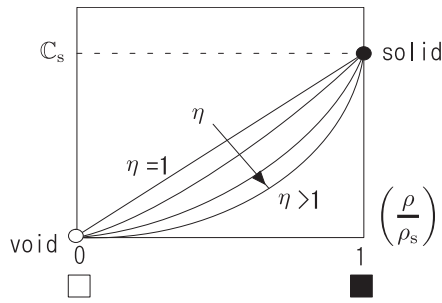


図-3 SIMP 法による内挿関数

を良設定問題 (well-posedness) に置き換える方法が取られる。これを正則化 (regularization) と言い、それを考慮した様々な材料モデルが提案されてきた。その代表的なものが、hole-in-cell microstructures<sup>1)</sup> や the layered-microstructures<sup>2),19)</sup> および SIMP 法<sup>33)</sup> (Solid Isotropic Microstructure with Penalization of intermediate densities) である。前者 2 つに関しては、‘0-1’ 間 (しばしばグレイスケールと呼ばれる) は、理論上物理的な意味を持ち得るが材料の異方性を考慮するための設計変数が含まれることにより、材料モデルがやや複雑で扱いにくいのが難点である。

一方、SIMP 法は、前者 2 つと異なり、グレイスケールは物理的な意味を持たないものの、設計変数が 1 つで扱い易く、一般に広く用いられている。ここでは、SIMP 法について簡単に説明する。なお、本論文では、グレイスケールの正則化において、それを内挿近似する関数を内挿関数と呼ぶことにする。

SIMP 法は、等方性多孔質材料を想定し、密度  $\rho$  を変数として、その材料剛性を以下のようなべき関数で内挿近似したものである。

$$C = C_s \left( \frac{\rho}{\rho_s} \right)^\eta \quad (2)$$

ここで、 $C$  は線形弾性域における有効材料剛性、 $C_s$ 、 $\rho_s$  は、固体 (solid) のもつ材料剛性及び密度を意味する。 $\rho/\rho_s$  は、正規化された設計変数 ( $0 \leq \rho/\rho_s \leq 1$ ) を意味する。また、 $\eta$  は物理的な意味を保証しないべき乗数である。図-3 は、SIMP 法の  $\eta$  の大きさによって、グレイスケールの内挿関数が変化する様子を示している。

なお、SIMP 法と同様の単純なべき関数で、グレイスケールに物理的な意味を与えるように改善した材料モデルも紹介されている<sup>6),14),15)</sup>。これらは、図-3 の 0-1 間において、幾つかの実験値をプロットし、それに調和させるように内挿関数のべき乗数を決めるものである。ここで、本論文では物理的な意味を与えるべき乗数を  $\hat{\eta}$  と書き、SIMP 法の  $\eta$  と区別する。

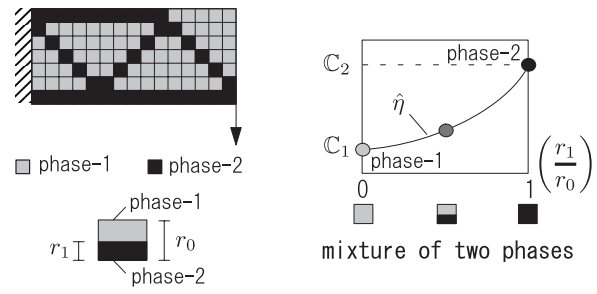


図-4 2 層材料最適化の概念

### (3) 多層材料最適化

本節は、複合材料を対象とする材料最適化について述べる。提案する多層材料最適化は、SIMP 法の概念を複合材料に拡張したもので、図-4 は 2 つの固体層からなる複合材料を対象とした 2 層材料最適化手法の概念を示している。本手法では、SIMP 法の void と solid がそれぞれ phase-1 と phase-2 の固体で置き換えられたと考えてよい。ここでは 2 次元の平面四辺形要素を想定しており、 $r_0$  は、ある 1 つの有限要素高さ、 $r_1$  はその要素内の phase-2 の高さである。この場合、3 章で示すように設計変数は要素内における phase-2 の体積比である。この概念は、Sigmund らが提案した multiphase topology optimization<sup>3),5),27),28)</sup> と同様のものであるが、本研究で提案する多層材料最適化は構成材料の非線形材料特性を考慮できる点異なる。本手法は、材料の非線形特性を定義するパラメータも材料剛性と同等にべき関数で内挿するもので、その具体的な内容については 5 章で述べる。なお、本手法で用いる内挿関数のべき乗数は、実験により求められ、グレイスケールは物理的な意味が保証されるものと仮定する。

本研究では、この多層材料最適化を使って FRC の繊維材の最適太さと長さを決定する。

## 3. 設計変数の選択と定義

### (1) 設計変数の選択

FRC は、その材料構成や力学的挙動の複雑さから、多くのパラメータを有する。これらのパラメータは最適化の設計変数となり得るため、ここでは最適化を行う前に FRC の力学的挙動に大きな影響を与えるパラメータを調査・抽出し、それを設計変数として数学的に定義する。

既往の FRC に関する文献<sup>9),11),12),13)</sup>等を参考にと、FRC の力学的挙動に大きな影響を与えるパラメータは、以下の 3 つのグループに大別することができる。1 つ目は、繊維材とコンクリートマトリックス間の界面特性に関するものである。既往の文献<sup>11),12),13)</sup>では、

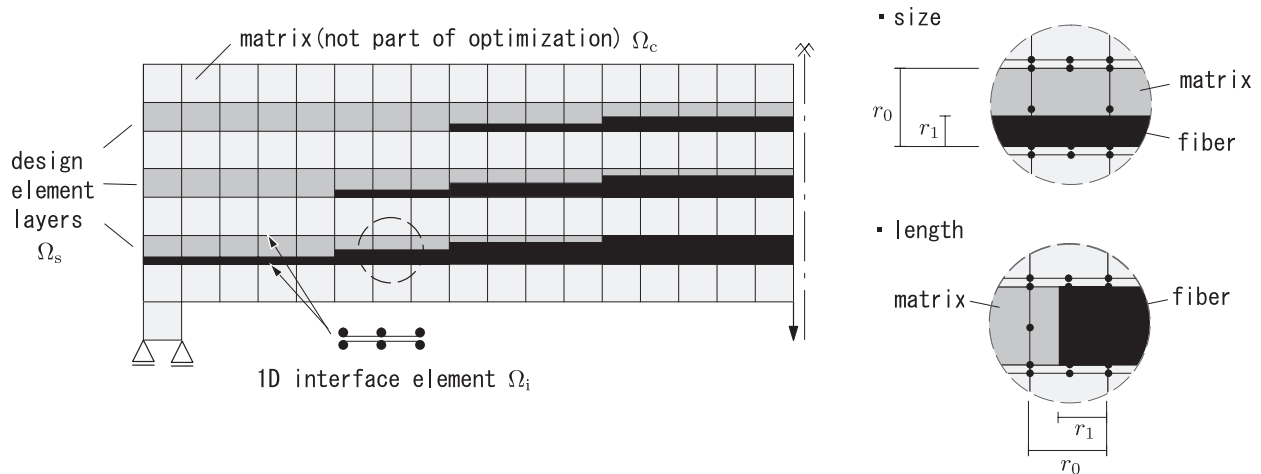


図-5 FRC の繊維材のレイアウトと設計変数の定義

カーボン繊維と AR-glass 繊維を用いた実験を行い、繊維束の太さ、フィラメントの表面被覆加工や表面粗さ、繊維束内への充填剤等が上記の界面特性に大きな影響を及ぼすと報告している。2つ目は、繊維材の幾何学的条件、すなわち、繊維束の太さ、長さ、配置場所、間隔、角度等<sup>9)</sup>である。そして、3つ目は使用する繊維材の種類である。

本研究では、2番目のグループの‘繊維束の太さ’と‘長さ’の2つを設計変数として選択する。まず1つ目のグループについては、構造挙動を評価する上で重要なパラメータであるが、既往の研究<sup>9)</sup>で繊維材にエポキシ樹脂による十分な充填が行われれば、フィラメントの表面被覆や表面粗さを変化させても構造挙動に大きな変化は見られないことが検証されている。したがって、本研究ではエポキシ樹脂による充填が行われていることを前提とし、界面に関するパラメータは設計変数から除外した。2番目のグループのうち、今回選択されなかったパラメータについては、本研究のような固定された一般の有限要素メッシュを用いると、幾何学上の問題から設計変数としては扱いづらい。よって、それらに関しては適切な離散化手法を用いた研究報告を別途行うものとした。また、3番目の繊維材の種類については、本論文で提案する手法と同様なアプローチで取り扱うことができるが、紙面のスペースの関係上、別途研究報告を行う。

## (2) 設計変数

図-5に示す FRC 梁の有限要素メッシュを用い、前節で選択した2つの設計変数を‘ $s$ ’で表す。本研究は、FRC の繊維材に着目した問題であるため、構造領域全

体ではなく繊維材が存在し得る場所のみを最適設計の対象領域とする。よって、構造は最適化に寄与しないコンクリートマトリックス(薄灰色:領域 $\Omega_c$ )と設計要素レイヤー(design element layer: 領域 $\Omega_s$ )に区分した。最適化はその設計要素レイヤーにおいてのみ行われる。また、 $\Omega_c$ と $\Omega_s$ 間の界面領域を $\Omega_i$ と置く。設計要素レイヤーは、1種類の繊維材(黒色)及びコンクリート(灰色)で構成される。

ここで、設計変数は繊維材の体積比で $s = r_1/r_0$ と定義する。これにより、設計要素はコンクリート( $s = 0$ )、繊維材( $s = 1$ )及び物理的意味を保證されたそれらの混合物( $0 < s < 1$ )と成り得る。また、コンクリートは、領域 $\Omega_c$ と $\Omega_s$ で区別されているが、同じ材料特性を有する。

選択した2つの設計変数を個別に見ると、まず‘繊維束の太さ’は、設計要素の中の繊維材の高さを意味する。繊維束の太さが長さ方向に一定であると仮定すれば、1つの設計要素レイヤー全体に渡り共通で1つの設計変数で表わされる。一方、‘繊維材の長さ’の場合、先の設計要素を90度回転させ、水平方向に繊維厚さをとる。この場合、各設計要素が1つの設計変数を持つものとして考える。このように、空間的なパラメータを用いて設計変数を定義することで構成材料の種類を選択する問題となり、結果として、それを材料の太さや長さ来决定する問題に読み替えたのが本手法である。

なお、図-5は、繊維材の方向性や位置等の幾何学上の条件を加味した異方性材料特性を有する設計要素のように見えるが、本研究では簡便的に繊維材の体積比から決定される等方性材料モデルを想定している。この等方性材料モデルについては、節4.(1)で簡単に紹

介する.

## 4. 材料モデル

### (1) 繊維材とコンクリートの材料モデル

本研究では、繊維材とコンクリートの非線形材料挙動を Peerlings らによって紹介された等方性の損傷力学モデル<sup>(21),(22),(23)</sup>で表現する. 損傷モデルの一般的な構成式は、以下のように記される.

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbb{C}_{\text{el}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C}_{\text{ed}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$  と  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は、それぞれコーシー応力テンソルおよび線形のひずみテンソルである. また、 $\mathbb{C}_{\text{el}}$ ,  $\mathbb{C}_{\text{ed}}$  は材料の線形弾性剛性テンソルおよび損傷を考慮した割線剛性テンソル、 $D(0 \leq D \leq 1)$  は損傷変数と呼ばれる. なお、ここで紹介する式や記号は両材料に共通であるとともに、複合材料にも有効である. すなわち、例えば線形材料剛性  $\mathbb{C}_{\text{el}}$  は、領域  $\Omega_c$ ,  $\Omega_s$  のコンクリートや繊維材単体、あるいは領域  $\Omega_s$  では複合材料の有効線形弾性剛性  $\mathbb{C}$  を意味する.

一般に連続体損傷モデルを用いる場合、解析で得られたひずみから局所等価ひずみを計算し、それを用いて損傷度合を算定する. しかし、局所等価ひずみのみを用いて損傷度合を評価すると、損傷が生じた有限要素内のひずみが過度に増大し、物理的に意味のない結果が得られることが知られている<sup>(21)</sup>. この場合、当該材料モデルのように要素近くの領域で平均近似した非局所等価ひずみを用いることで、その数値解析上の問題を改善することができる. ここでは、まず今回用いた局所等価ひずみ  $\varepsilon_v$  を示し、最後に非局所等価ひずみ  $\tilde{\varepsilon}_v$  の近似方法を記述する.

本研究では、圧縮と引張強度の大きく異なる材料に広く用いられる de Vree<sup>(31)</sup>の局所等価ひずみ  $\varepsilon_v$

$$\varepsilon_v(I_1, J_2) = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 - \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2} \quad (4)$$

を用いた. ここで、 $I_1$ ,  $J_2$  はひずみテンソルの 1 次不変量および偏差ひずみテンソルの 2 次不変量を意味する.  $\nu$  はポアソン係数、 $k$  は圧縮強度の引張強度に対する比である.

次に損傷変数  $D$  は、Mazars と Pijaudier-Cabot<sup>(18)</sup>の関係式、

$$D(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \left( 1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \right) \quad \text{if } \kappa \geq \kappa_0 \quad (5)$$

に従った. ここで、 $\alpha$  は応力の終局状態を表わす定数、 $\beta$  は損傷進展速度を支配する定数、 $\kappa_0$  は損傷が発生する点を示す初期等価ひずみである.  $\kappa$  は、材料がこれ

までに受けた最も大きい損傷変形を示す等価ひずみである.

ここで塑性理論と同様に、損傷が進展するか否かを判定する荷重状態関数  $\Psi$  を以下のように定義する.

$$\Psi(\varepsilon_v, \kappa) = \varepsilon_v - \kappa \quad (6)$$

$\Psi < 0$  の場合は、現在の損傷レベルを超えず、損傷が進展しないことを示し、損傷が進展するのは現時点の状態がその荷重境界値に達する時 ( $\Psi = 0$ ) である. 一般には、それらの関係は材料にかかる荷重の載荷/除荷/再載荷の状態を加味し、以下の Kuhn-Tucker 条件式で表わされる.

$$\Psi \dot{\kappa} = 0, \quad \Psi \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad (7)$$

なお、式 (7) では  $\kappa$  の時間微分を含んでいるが、非時間依存型の塑性モデル等と同様に 1 つ前の荷重ステップにおける  $\kappa$  との差分を用いて静的な解析が行われる. 非局所等価ひずみを用いた損傷モデルの場合、式 (6) の局所等価ひずみ  $\varepsilon_v$  を以下で近似される非局所等価ひずみ  $\tilde{\varepsilon}_v$  で置き換えることとなる<sup>(21),(22),(23)</sup>.

$$\tilde{\varepsilon}_v - c \nabla^2 \tilde{\varepsilon}_v = \varepsilon_v \quad (8)$$

ここで、 $\nabla^2$  はラプラス演算子を示し、 $c$  は変形の局所化を近似するための長さを単位にもつ正の定数で、一般には有限要素の平均長さよりも大きめに設定する. 当該材料モデルの特徴は、式 (8) で示されるように、非局所等価ひずみ  $\tilde{\varepsilon}_v$  が局所等価ひずみ  $\varepsilon_v$  と陰的に関連づけながら近似されている点にある.

### (2) 界面の材料特性

本研究では、繊維束とコンクリートとの界面における材料特性に Krüger らが提唱する不連続接合モデル<sup>(11)</sup>を用いる. このモデルは、カーボン繊維束と AR-glass 繊維束を使った引抜き実験結果に基づくもので、繊維材が界面において長手方向に滑る単純な 1 自由度モデルである.

この応力-すべり関係 ( $\sigma - w$ ) は次式で与えられる<sup>(11)</sup>.

$$\sigma = \tilde{w} \cdot \left\{ b + (1-b) \cdot \left( \frac{1}{1 + \tilde{w}^{R_s}} \right)^{\frac{1}{R_s}} \right\} \cdot \sigma_0 \quad \text{for } w \leq w_1 \quad (9)$$

ここで、 $w$  は界面の繊維方向における滑り長さ、 $\tilde{w} = w/w_0$  は滑り比を示す.  $w_0$  は、図-6 に示すように初期剛性  $k_1$  と界面の付着応力が最大付着強度に達するすべり長さ  $w_1$  およびそこでの接線剛性  $k_2$  から図式的に決定される滑り長さである.  $b = k_2/k_1$  と  $\sigma_0 = k_1 \cdot w_0$  は応力を計算するためのパラメータ、 $R_s$  は  $w_1$  における曲率である.

また、 $w > w_1$  の領域における応力-すべり関係は、界面における付着強度  $\sigma_m$  と摩擦強度  $\sigma_f$  を用いて次式

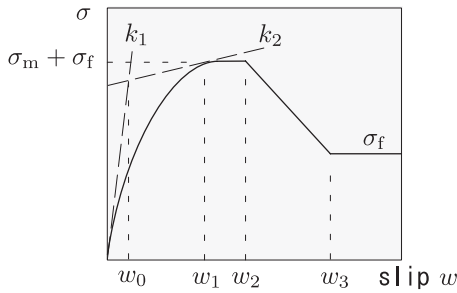


図-6 コンクリートマトリックスと繊維材束間の界面の不連続結合モデル

で与えられる.

$$\sigma_m = \sigma_{m,0} \psi, \quad \sigma_f = \sigma_{f,0} \psi \quad (10)$$

ここで,

$$\psi = 1 + \tanh \left[ \alpha_r \frac{\sigma_R}{0.1 f_c} - \alpha_f \nu \varepsilon_s \left( 1 - \frac{r_s^2}{(r_s + h_s)^2} \right)^{-1} \right] \quad (11)$$

である. 上式の  $\psi (1 < \psi < 2)$  は, 繊維材の材料, 荷重状態, 繊維材に垂直な応力の影響を考慮する付加的な係数である.  $\sigma_{m,0}$  と  $\sigma_{f,0}$  は, それぞれ初期付着強度, 初期摩擦強度,  $r_s$  は繊維束の半径,  $\nu$  は繊維材のポアソン係数,  $h_s$  は繊維材の表面粗さを表す. また,  $\alpha_r$  と  $\alpha_f$  は繊維材の中心半径方向の変形を考慮する係数である.  $f_c$  は, コンクリートの一軸圧縮強度,  $\varepsilon_s$  は繊維材の長手方向のひずみ,  $\sigma_R$  は繊維材軸芯に垂直に作用する応力を意味する. 当該界面モデルの詳細は, 文献<sup>(11),(12),(13)</sup>を参照されたい. そこでは, 荷重載荷・除荷状態に関する応力-すべり関係の説明も述べられている. 本研究では, 繊維束とコンクリートの有限要素の間に設けた厚みのない界面要素<sup>(24),(25)</sup>にこの1自由度の界面非線形材料モデルを組み込んで解析を行った. なお, この界面材料モデルは, 3次元の構造モデルに使用されることを前提としているので, 本研究のような2次元の構造モデルに用いる場合, 想定している繊維束の総表面積が保持されるような工夫をする必要がある<sup>(9)</sup>.

## 5. 非線形材料モデルの内挿関数

### (1) 基本モデル

本章は, 損傷モデルを考慮した多層材料最適化の内挿関数を提案する. ここではまず2層複合材料の基本となるモデルを紹介する.

前述のとおり, 設計変数  $s = r_1/r_0$  を用いて2層複合材料の有効線形弾性剛性  $\mathbb{C}$  を示すと以下ようになる.

$$\mathbb{C} = (1 - s^{\hat{\eta}}) \mathbb{C}_1 + s^{\hat{\eta}} \mathbb{C}_2 \quad (12)$$

ここで, 添え字1と2は, それぞれ phase-1 と phase-2

の線形弾性剛性を意味する ( $\mathbb{C}_1 \leq \mathbb{C}_2$ ).  $\hat{\eta}$  は前述のとおり, この混合物のグレイスケールに物理的な意味を与える内挿関数の乗数である.

### (2) 2層材料モデル

本節は, 式(12)で記した線形弾性剛性を節4.(1)で述べた損傷モデルへ拡張する. この場合, ヤング係数  $E$  と式(5)内の3つの定数, 初期等価ひずみ  $\kappa_0$  とひずみ軟化特性を定義する  $\alpha, \beta$  の計4つの材料定数が各材料に存在する.

本研究では, 基本モデルと同様に, べき関数による内挿関数をこの4つの材料定数に適用する. ここで, 後述の説明の煩雑さを避けるために式(12)の  $\mathbb{C}$  を  $\zeta$  で置き換える.

$$\zeta = (1 - s^{\hat{\eta}}) \zeta_1 + s^{\hat{\eta}} \zeta_2 \quad (13)$$

この  $\zeta$  においては, 上記の4つの定数(あるいは変数)を代表する有効材料変数と呼ぶことにする.  $\zeta_1$  と  $\zeta_2$  は, それぞれ phase-1 と phase-2 の材料定数である.

しかし, 各々の有効材料変数は線形材料剛性とは異なり, 必ずしも下に凸の内挿関数で近似できるという力学的な根拠がないため, 式(13)をそのままそれらに適用することはできない. そこで, まず個々の材料変数の特徴を理解するために後述の式(17)で定義される目的関数  $f$  との関係を考えてみる. 本研究の目的関数は, エネルギー吸収能力であり, それは構造応答として荷重-変位曲線で囲まれる面積, あるいは材料レベルで見ると各要素の応力-ひずみ曲線で囲まれる面積を構造全体で積分したものである. そこで, 3つの材料変数を変化させずに, 残りの1つの材料変数のみを増加させた場合の目的関数  $f$  の変化について考察する. まず, 図-7(a)に示すようにヤング係数  $E$  のみを大きくすると応力-ひずみ曲線下側にある面積が増え, エネルギー吸収能力が増加することがわかる. 初期等価ひずみ  $\kappa_0$  についても図-7(b)より同様の関係が理解できる. ところが,  $\alpha$  と  $\beta$  については, それが増加するにつれ, その応力-ひずみ曲線下側の面積が減少することが図-7(c), (d)より理解できる. これらの関係は, 目的関数  $f$  の有効材料変数  $\zeta$  による微分をとると次のように整理できる.

$$\nabla_{\zeta} f \begin{cases} \geq 0 & (\zeta = E, \kappa_0 \text{ の場合}) \\ < 0 & (\zeta = \alpha, \beta \text{ の場合}) \end{cases} \quad (14)$$

この関係を考慮しながら, 再度各々の内挿関数を定義する. まず最初に, ヤング係数  $E$  の内挿関数については, 式(13)は  $E_1 \leq E_2$  の条件下では理にかなったものであると言える. それは, ヤング係数の大きい phase-2の方がその混合物の力学的挙動において, より大きな影響力を持ち, 結果として, 図-8(a)に示すように  $s = 1$  における勾配  $\nabla_s E$  が  $s = 0$  のそれよりも大きくなるような内挿関数が必要となるからである. この時,

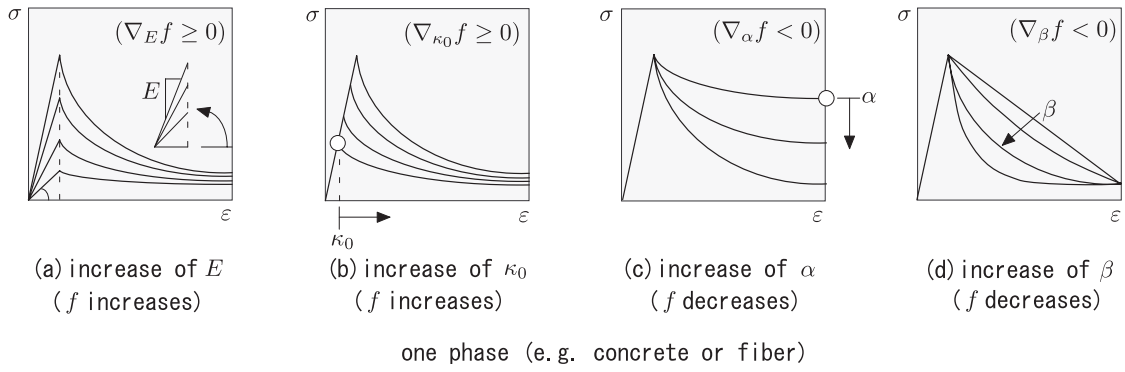


図-7 損傷モデルの一軸引張り応力-ひずみ曲線において、1つの材料変数のみを増加させた場合の変化図：(a) ヤング係数  $E$ , (b) 初期等価ひずみ  $\kappa_0$ , (c)(d) ひずみ軟化特性を定義する  $\alpha$ ,  $\beta$  を変化させた場合

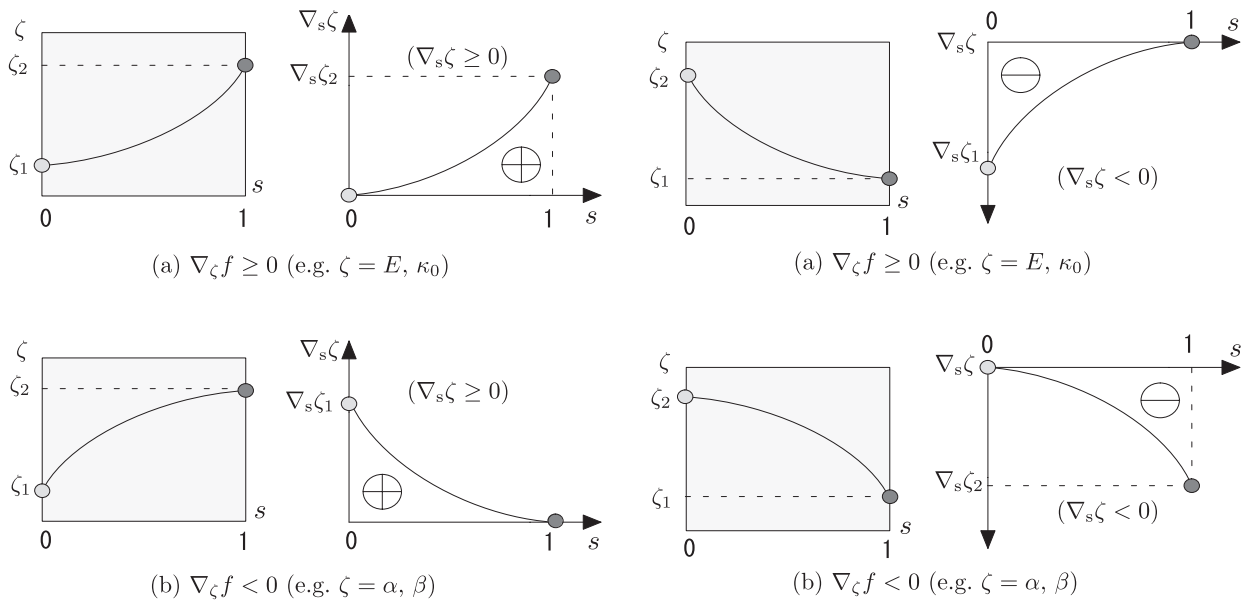


図-8  $\zeta_1 \leq \zeta_2$  の条件下での内挿関数 (左) とその設計変数による微分 (右)

図-9  $\zeta_1 > \zeta_2$  の条件下での内挿関数 (左) とその設計変数による微分 (右)

phase-2 を‘支配的材料’と呼ぶ。  $\kappa_0$  も同様な傾向があるため、  $\kappa_{01} \leq \kappa_{02}$  の条件下では、式 (13) による内挿関数を適用できる。

一方、材料のひずみ軟化特性を定義する  $\alpha$  と  $\beta$  については、それとは対称的な関係にある。  $\zeta_1 \leq \zeta_2$  の条件下では、今度は phase-1 が‘支配的材料’となり、  $s = 0$  における勾配が  $s = 1$  のそれよりも大きくなるような内挿関数が必要となる。その関数は以下の数学的表現で示され、図-8 (b) にある、上に凸の内挿関数となる。

$$\zeta = (1-s)^{\hat{\eta}} \zeta_1 + [1 - (1-s)^{\hat{\eta}}] \zeta_2 \quad (15)$$

さらに材料の条件によっては  $\zeta_1 > \zeta_2$  の関係も生じ得る。この場合、式 (13) と式 (15) は相互交換の関係となり、結果として図-9 (a) と (b) のようになる。上記を整理したものが以下の式であり、これが本研究で提案す

る、損傷力学を考慮した2層複合材料の内挿関数の一般式である。

$$\zeta = \begin{cases} (1-s)^{\hat{\eta}} \zeta_1 + s^{\hat{\eta}} \zeta_2 \\ \text{for } \zeta : \begin{cases} E, \kappa_0 & (\zeta_1 \leq \zeta_2) \quad \text{図-8(a)} \\ \text{or} \\ \alpha, \beta & (\zeta_1 > \zeta_2) \quad \text{図-9(b)} \end{cases} \\ (1-s)^{\hat{\eta}} \zeta_1 + [1 - (1-s)^{\hat{\eta}}] \zeta_2 \\ \text{for } \zeta : \begin{cases} E, \kappa_0 & (\zeta_1 > \zeta_2) \quad \text{図-9(a)} \\ \text{or} \\ \alpha, \beta & (\zeta_1 \leq \zeta_2) \quad \text{図-8(b)} \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

ここで、  $\hat{\eta}$  については、4つの材料変数すべてに同じ値を用いる必要はない。なお、これら4つの材料変数の他に式 (4) には残り2つの変数、強度比  $k$  とポアソン係数  $\nu$  がある。これらは、  $E$  と  $\kappa_0$  と同じ傾向をもつた

め、ここではそれらに倣って同様の内挿関数を用いた。

## 6. 最適化問題

### (1) 問題設定

最適化問題は、一般に目的関数  $f(\hat{s})$ 、制約条件を与える等式制約関数  $h(\hat{s})$  と不等式制約関数  $g(\hat{s})$  で定義される。これらは、設計関数と呼ばれる。 $\hat{s}$  は、設計変数  $s$  を列に並べたもの、すなわち設計変数ベクトルを意味する。

本研究では、前述のとおり構造全体で繊維材の量が常に一定であるという条件下で、FRC 構造のエネルギー吸収能力を最大にするような最適化問題を考える。

エネルギー吸収能力は、荷重-変位曲線で囲まれる面積、あるいは有限要素レベルで見ると、各要素の応力-ひずみ曲線で囲まれるエネルギーを構造全体で積分したものと定義できる<sup>17)</sup>。よって、当該最適化問題は、以下のように定式化される。

$$\text{minimize } f(\hat{s}) = - \int_{\Omega} \int_{\hat{\epsilon}} \sigma d\epsilon d\Omega \quad (17)$$

$$\text{subject to } h(\hat{s}) = \int_{\Omega_s} s d\Omega_s - \hat{V} = 0 \quad (18)$$

$$\hat{s}_L \leq \hat{s}_i \leq \hat{s}_U \quad i = 1, \dots, n_s \quad (19)$$

ここで、 $\hat{V}$  は予め決められた構造全体の繊維材体積、 $\hat{s}_L$  と  $\hat{s}_U$  は、設計変数の下限と上限値、 $n_s$  は設計変数の数を意味する。(17) の  $\hat{\epsilon}$  は、構造解析において各荷重ステップで収束した後のひずみを意味する。

なお、最適化問題は一般に目的関数を最小化するように設定する。そのため、当該問題のように目的関数の最大化は、敢えてそれに-1 をかけた関数の最小化と等価であり、論理の一般性を失わない。また、式(18)の制約条件に加え、力のつり合い式(平衡方程式)も条件として満足しなければならない。これらの条件を踏まえ、最適化問題の解法手順を次節で述べる。

### (2) 解法手順

まず最初に解法手順を図-10 に示す。当該問題は、微分法による最適化アルゴリズムを用いるため、構造解析後に設計変数  $s$  に関する感度解析を行う。ここで得られた設計関数の全微分  $\nabla_s f$ 、 $\nabla_s h$  を最適性規準法(OC法)<sup>20)</sup>による最適化アルゴリズムへ組み込み、最適解を求め、解が収束するまで繰り返し計算を行う。因みにOC法は、KKT条件の最適性規準を基本とした発見的アルゴリズムであり、数値解析上の安定性と速さ、さらには比較的多くの設計変数を取り扱うことができるため、トポロジー最適化問題に用いられることが多い。

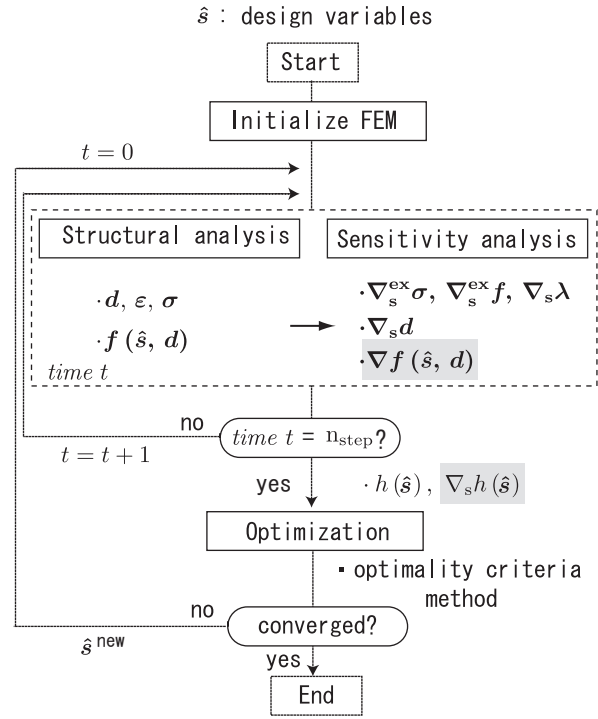


図-10 構造最適化のフローチャート

式(17)で示すとおり、当該目的関数  $f$  は設計変数  $\hat{s}$  だけでなく変位  $d$  に依存し、さらには変位  $d$  も設計変数  $\hat{s}$  に依存する。これより、目的関数  $f = f(\hat{s}, d)$  の設計変数  $s$  による全微分は、連鎖律により以下になる。

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{s}, d) &= \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial s} \\ &= \nabla_s f + \nabla_d f^T \nabla_s d \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、変位  $d$  は構造解析における節点変位ベクトルで未知数であるため、その微分  $\nabla_s d$  を陽的に直接求めることはできない。その結果、右辺の第1項が陽的な微分、第2項の右側が陰的な微分として区分される。なお、本論文では陽的な微分の場合によって  $\nabla^{\text{ex}}(\bullet)$  と表現する。

感度解析では、その  $\nabla_s d$  をどう解くかが主要な問題となる。ここでは、次節で述べる力のつり合い式を微分し、そこから  $\nabla_s d$  を直接導く方法を取る。このアプローチを正確には変分解析直接法(variational analytical direct method)という。

当該問題のように構造問題が経路依存型の非線形問題の場合、その最適化問題も一般に経路依存型となる。本研究では構造問題を変位制御法を使って準静的に解くことから、各荷重ステップでそのつり合い式を解いた後、目的関数の感度解析を行う。なお、図-10の時間  $t$  とは現実の時間ではなく、準静的に解いた場合の荷重ステップ数を言う。また、その総荷重ステップ数を

図-10 では  $n_{\text{step}}$  としている.

一方, 繊維の総体積に関する等式制約関数  $h$  については, 応力や変位に無関係に経路に依存しないことは明らかである. そのため,  $h$  の感度解析は, 全体の構造解析が終了した後に一度行えばよい. なお,  $\nabla_s h$  と式 (20) の第 1 項及び  $\nabla_d f$  は, 陽的に求まるため, 本論文では説明を省略する.

## 7. 平衡方程式

前述のとおり, 本研究では準静的に構造問題を解く. そのため, 現時刻  $t+1$  (あるいは現荷重ステップ  $t+1$ ) における, 仮想仕事の原理を平衡方程式として用いる. 当該問題は, 有限要素法を用いているので離散化後のマトリックス形式でつり合い式を表すと以下のようになる.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_{t+1} d\Omega = \lambda_{t+1} \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_0 d\Gamma \quad (21)$$

ここで,  $\lambda$  は基本の表面荷重ベクトル  $\mathbf{t}_0$  に対する荷重係数である. なお, 簡単のため物体力項は省略した.

この平衡方程式を設計変数  $s$  で微分することにより,  $\nabla_s \mathbf{d}$  を求めることができる. 任意である仮想変位  $\delta \mathbf{u}$ , 仮想ひずみ  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  については, 今回の設計変数  $\hat{s}$  に依存せず, それらの設計変数による微分項は現れない.

これらを踏まえて平衡方程式 (21) を設計変数  $s$  で微分すると以下のようになる.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1} d\Omega = \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}_0 d\Gamma \quad (22)$$

なお, ここでは表面荷重ベクトル  $\mathbf{t}_0$  は設計変数に依存しないものとする.

陰的な微分項  $\nabla_s \mathbf{d}$  は, 式 (22) に応力と荷重係数の微分  $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$ ,  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  を代入し, それを整理することで求めることができる. そのため, 次節では  $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$ ,  $\nabla_s \lambda_{t+1}$  の求め方について述べる.

## 8. 感度の導出

まず, 主たる変数である応力の微分  $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  を誘導する. そのため, ここでは応力  $\boldsymbol{\sigma}$ , 損傷変数  $D$ , 最大等価ひずみ  $\kappa$  および局所等価ひずみ  $\varepsilon_v$  と設計変数  $\hat{s}$  との関係性を以下に記す. なお, ここでは簡便的に非局所等価ひずみ  $\bar{\varepsilon}_v$  の設計変数による微分項の影響は考慮し

ない.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(D, \mathbb{C}(E(\hat{s}), \nu(\hat{s})), \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{s})) \quad (23)$$

$$D = D(\kappa, \kappa_0(\hat{s}), \alpha(\hat{s}), \beta(\hat{s})) \quad (24)$$

$$\kappa = \kappa(\varepsilon_v, \kappa_u(\boldsymbol{\varepsilon}_u)) \quad (25)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{s})), J_2(\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{s})), k(\hat{s}), \nu(\hat{s})) \quad (26)$$

ここで,  $\kappa_u$  と  $\boldsymbol{\varepsilon}_u$  は, 材料の荷重除荷 (unloading) が始まった時点  $t_u$  での最大等価ひずみとひずみを示す. よって, 応力の微分  $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  は, 連鎖律を適用して次式のようになる.

$$\begin{aligned} \nabla_s \boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_v} \\ &\cdot \left( \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial s} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial s} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial s} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial D} \left( \frac{\partial D}{\partial \kappa_0} \frac{\partial \kappa_0}{\partial s} + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial D}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial D}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} \frac{\partial \kappa_u}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbb{C}} \left( \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial s} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial s} \right) \\ &= \mathbb{C}_T \nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} + \nabla_s^{\text{ex}} \boldsymbol{\sigma}_{t+1} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで,

$$\mathbb{C}_T = \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}_{\mathbb{C}_{\text{ed}}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_v} \left( \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{\text{ex}} \boldsymbol{\sigma}_{t+1} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial D} \left( \frac{\partial D}{\partial \kappa_0} \frac{\partial \kappa_0}{\partial s} + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial D}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_v} \left( \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial s} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbb{C}} \left( \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial s} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} \frac{\partial \kappa_u}{\partial s} \end{aligned} \quad (29)$$

である. 上式の  $\mathbb{C}_T$  は, 時間  $t+1$  における複合材料の接線剛性マトリックスである.

次に  $\mathbb{C}_T$  と  $\nabla_s^{\text{ex}} \boldsymbol{\sigma}_{t+1}$  を求めるために, 各々の微分項を順に導出する. まず,  $\nabla_D \boldsymbol{\sigma} = \partial \boldsymbol{\sigma} / \partial D$  は, 式 (3) より

$$\nabla_D \boldsymbol{\sigma} = -\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (30)$$

となる. また, 式 (28) と式 (29) 内の損傷係数に関する微分項は, 式 (5) より以下のようになる.

$$\nabla_{\kappa_0} D = -\frac{1}{\kappa} (1 - \alpha) - \frac{1}{\kappa} (1 + \kappa_0 \beta) \alpha e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \quad (31)$$

$$\nabla_{\alpha} D = \frac{\kappa_0}{\kappa} \left( 1 - e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \right) \quad (32)$$

$$\nabla_{\beta} D = \frac{\kappa_0}{\kappa} (\kappa - \kappa_0) \alpha e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\kappa} D &= \frac{\kappa_0}{\kappa^2} (1 - \alpha) + \alpha \kappa_0 \left( \frac{\beta}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} \right) e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \\ &\quad \text{if } \kappa \geq \kappa_0 \quad \text{else } 0 \end{aligned} \quad (34)$$

局所等価ひずみ  $\varepsilon_v$  に関する微分項は、式 (4) より次のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla_k \varepsilon_v = & \frac{I_1}{2k^2(1-2\nu)} \\ & - \frac{1}{2k^2} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 - \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2} \\ & + \frac{1}{4k \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 - \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2}} \\ & \times \left[ \frac{2(k-1)}{(1-2\nu)^2} I_1^2 - \frac{12}{(1+\nu)^2} J_2 \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \varepsilon_v = & \frac{k-1}{k(1-2\nu)^2} I_1 + \frac{1}{k \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 - \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2}} \\ & \cdot \left[ \frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^3} I_1^2 - \frac{6k}{(1+\nu)^3} J_2 \right] \end{aligned} \quad (36)$$

また、 $\kappa$  に関する微分項については、荷重条件式によって以下のように決定される。

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_v} = \begin{cases} 1 & \text{if loading} \\ 0 & \text{if un-/reloading} \end{cases} \quad (37a)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} = \begin{cases} 0 & \text{if loading} \\ 1 & \text{if un-/reloading} \end{cases} \quad (37b)$$

式 (37) のうち、その材料が荷重載荷状態の場合、現時刻  $t+1$  での等価ひずみ  $\varepsilon_v$  は  $\kappa$  で置き換えられるため、 $\nabla_{\varepsilon_v} \kappa$  は 1 となる。

一方、 $\kappa$  はその材料が時刻  $t+1$  までに経験した最大境界値をとる変数であるため、その材料が荷重除荷状態になっても  $\kappa$  自体は変化しない。よって、 $\kappa$  は時刻  $t$  のそれと同じ値、すなわち  $\kappa_u$  である。その結果、 $\nabla_{\varepsilon_v} \kappa = 0$ 、 $\nabla_{\kappa_u} \kappa = 1$  が導かれる。

最後に、式 (29) 内の  $\kappa_u$  の設計変数  $s$  に関する微分は次式で表される。

$$\frac{\partial \kappa_u}{\partial s} = \frac{\partial \kappa}{\partial s} \bigg|_{t=t_u} = \underbrace{\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_v}}_{=1} \left( \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon} \right) \bigg|_{t=t_u} \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial s} \quad (38)$$

式中のひずみの微分項  $\nabla_s \varepsilon_u$  は、一般的な B マトリックスを用いて

$$\nabla_s \varepsilon_u = \mathbf{B} \nabla_s \mathbf{d}_u \quad (39)$$

と定義した。ここで、 $\mathbf{d}_u$  は時間  $t_u$  における節点変位ベクトルを意味する。ちなみに  $\mathbf{d}_u$  と式 (38) の括弧内は、その材料が荷重載荷状態にある場合、その都度保存及び更新する必要がある。

式 (30) から式 (39) までを式 (27) に挿入し、それを式

(22) に代入すると次のように整理できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbb{C}_T \mathbf{B} d\Omega \nabla_s \mathbf{d} \\ & = \nabla_s \lambda_{t+1} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_0 d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \nabla_s^{\text{ex}} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \end{aligned} \quad (40)$$

この式は、右辺のベクトルを集め、それを 1 つの疑似的な荷重ベクトル  $\mathbf{P}_{\text{pse}}$  と見なせば、次のような典型的な剛性方程式の形式になる。

$$\mathbf{K}_T \nabla_s \mathbf{d} = \mathbf{P}_{\text{pse}} = \nabla_s \lambda_{t+1} \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}}_{\text{pse}} \quad (41)$$

ここで、 $\mathbf{K}_T$  は、時間  $t+1$  における接線剛性マトリックスである。

次に、荷重係数の設計変数による微分  $\nabla_s \lambda$  について考える。ここでは、文献<sup>(10),(16),(26)</sup>を参考に変位制御法における節点変位ベクトルの制御される‘成分’（仮に  $j$  番目とする） $d_j$  を  $\hat{d}_j$  と置き、その微分  $\nabla_s \hat{d}_j$  が 0 となることを利用する。これは、その節点変位ベクトル成分が設計変数  $\hat{\mathbf{s}}$  に無関係に決定されることを応用したものである。すなわち、式に表すと以下ようになる。

$$\nabla_s \hat{d}_j = \nabla_s \lambda_{t+1} \frac{\check{d}_j}{\lambda_{t+1}} + \left( \nabla_s \hat{d}_j \right)_{\text{pse}} = 0 \quad (42)$$

ここで、 $\check{d}_j$  と  $\left( \nabla_s \hat{d}_j \right)_{\text{pse}}$  は以下で得られるベクトル  $\check{\mathbf{d}}$  および  $\left( \nabla_s \hat{\mathbf{d}} \right)_{\text{pse}}$  の  $j$  番目の成分を意味する。

$$\check{\mathbf{d}} = \mathbf{K}_T^{-1} \lambda_{t+1} \tilde{\mathbf{P}} \quad (43)$$

$$\left( \nabla_s \hat{\mathbf{d}} \right)_{\text{pse}} = \mathbf{K}_T^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\text{pse}} \quad (44)$$

この  $\check{d}_j$  と  $\left( \nabla_s \hat{d}_j \right)_{\text{pse}}$  を式 (42) に代入すると以下が得られる。

$$\nabla_s \lambda_{t+1} = - \frac{\left( \nabla_s \hat{d}_j \right)_{\text{pse}}}{\check{d}_j} \lambda_{t+1} \quad (45)$$

以上より、全体の節点変位ベクトルの微分  $\nabla_s \hat{\mathbf{d}}$  が次のように表される。

$$\nabla_s \hat{\mathbf{d}} = \check{\mathbf{d}} \frac{\nabla_s \lambda_{t+1}}{\lambda_{t+1}} + \left( \nabla_s \hat{\mathbf{d}} \right)_{\text{pse}} \quad (46)$$

最後に、目的関数  $f$  の設計変数による微分  $\nabla_s f$  は、式 (46) を式 (20) に代入して得られる、各荷重ステップにおける感度を荷重総ステップ数  $n_{\text{step}}$  回足し合わせることで求められる。

$$\nabla f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{d}) = \sum_{t=1}^{n_{\text{step}}} \left( \nabla_s^{\text{ex}} f_t + \nabla_d f_t^T \nabla_s \hat{\mathbf{d}}_t \right) \quad (47)$$

ここで、 $f_t$  は、荷重ステップ  $t$  内で得られたエネルギー吸収能力を意味する。

以上のようにして求められる目的関数の微分  $\nabla f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{d})$  と陽的に求められる等式制約関数の微分  $\nabla_s h(\hat{\mathbf{s}})$  とをともに最適化アルゴリズムに導入し、反復収束計算を行うことになる。収束した設計変数  $\hat{\mathbf{s}}$  が次の最適化ステップで用いられる設計変数 (図-10 中の

表-1 コンクリートと繊維材束の界面における材料定数

| 材料定数           | 単位            | AR-glass | カーボン |
|----------------|---------------|----------|------|
| $k_1$          | MPa/mm        | 500      | 500  |
| $k_2$          | MPa/mm        | 27       | 48   |
| $k_{sec}$      | MPa/mm        | 90       | 159  |
| $\sigma_{m,0}$ | MPa           | 10.1     | 10.1 |
| $\sigma_{f,0}$ | MPa           | 5.0      | 5.0  |
| $w_2 - w_1$    | mm            | 0.03     | 0.03 |
| $w_3$          | mm            | 2.0      | 0.75 |
| $h_s$          | $\mu\text{m}$ | 0.02     | 0.02 |
| $R_s$          | —             | 2.5      | 2.5  |
| $\nu$          | —             | 0.2      | 0.2  |
| $\alpha_r$     | —             | 1.0      | 1.0  |
| $\alpha_f$     | —             | 2.0      | 2.0  |
| $f_c$          | MPa           | 90.0     | 90.0 |

注) すべり長さ  $w_1 = (\sigma_m + \sigma_m) / k_{sec}$

|                                        | concrete | AR-glass |
|----------------------------------------|----------|----------|
| Young's modulus $E$ (GPa):             | 39       | 72       |
| Poisson's ratio $\nu$ :                | 0.2      | 0.2      |
| initial equivalent strain $\kappa_0$ : | 0.0002   | 0.007    |
| sensitivity factor $k$ :               | 10.0     | 1.0      |
| softening parameters $\alpha$ :        | 0.96     | 0.9      |
| $\beta$ :                              | 10.0     | 3.0      |

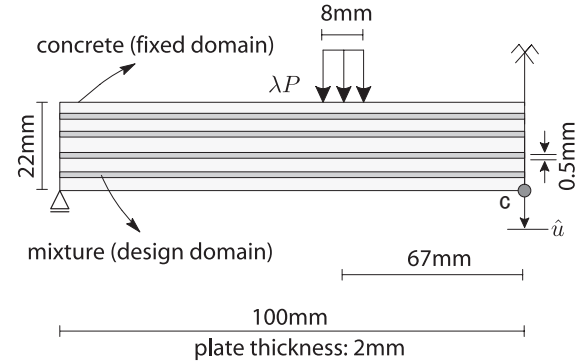


図-11 数値解析に用いる構造および材料定数

$\hat{s}^{\text{new}}$ ) となり, 再び  $t = 0$  として構造解析を実行する. この一連の作業を繰り返すことで最適解に近づけることができる.

## 9. 数値解析例

### (1) 解析条件

本章は, 図-11 に示す 4 つ繊維束をもつ FRC 単純梁のエネルギー吸収能力を最大にする問題を扱う. 4 つの設計要素レイヤーは, コンクリート (phase-1) とガラス繊維 (phase-2) で構成されている. 前述のとおり, コンクリートと繊維材には等方性損傷力学モデル, それらの界面には Krüger らの接合モデルを用いる. 図-11 及び表-1 に示すコンクリートと繊維材及びその界面における材料定数は, 文献<sup>(11),(12),(13)</sup>で使用した実験値をそのまま適用した. ただし, それらに含まれない損傷モデルのパラメータである初期等価ひずみ  $\kappa_0$ , ひずみ軟化特性を定義する  $\alpha$ ,  $\beta$  および材料の引張/圧縮強度比  $k$  については, 文献<sup>(11),(12),(13)</sup>の実験結果を考慮したパラメータ解析を行うと同時に FRC に関する他の研究報告とも比較しながら, より現実的な値を設定するように努めた.

図-12 は, 解析で用いる 2 次元の有限要素メッシュである. 解析は対称性を考慮して片側半分で行い, 要素の総数は 425 個である. 板厚数ミリ程度の FRC の製作が可能であることから, 平面応力状態を仮定している. 変位制御法の制御点 c は, 梁の中央底面にセットした.

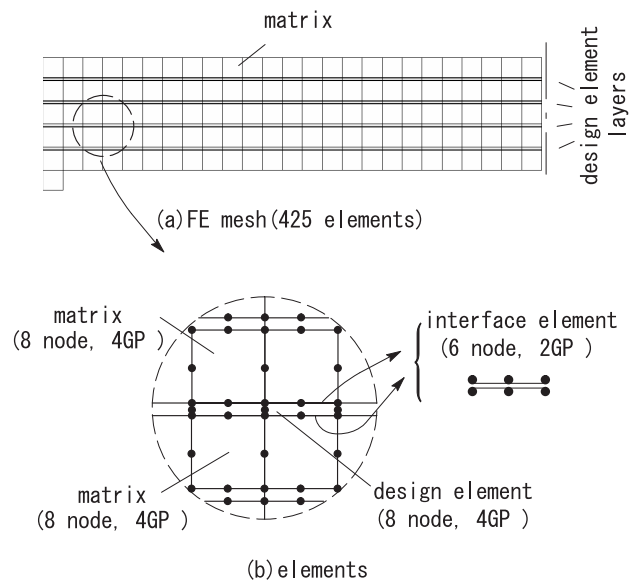


図-12 (a) 解析に用いる有限要素メッシュと (b) 有限要素

### (2) 最適化例 1: 繊維材の長さ

本節は, 繊維材の長さ決定する最適化問題を扱う. ここでは, 繊維材の太さは 0.5mm で一定とし, 最適化途中でも変化しないものとする. 最適化前の設計変数の初期値は, すべての設計要素において  $s = 0.7$  と設定した. その結果, 繊維材の体積は FRC 構造全体の体積の 6.5% となり, これは最適化計算中も一定に保たれる.

ここでは, 以下の 2 ケース, (i) 線形弾性域 (損傷がまだ発生していない低い荷重レベル) と (ii) 材料非線形域 (損傷が発生するレベル) について最適化を行い, 得られた最適構造の比較を行う. この 2 つのケースの荷

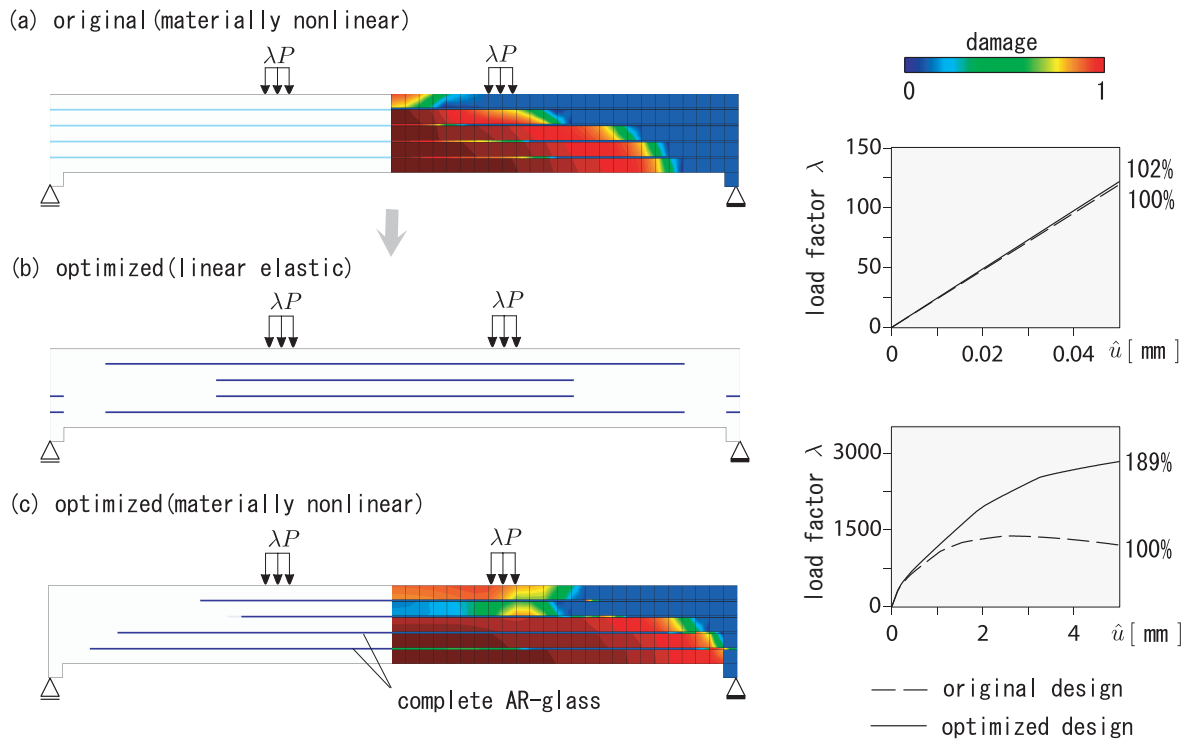


図-13 繊維材の長さを設計変数とした場合の最適化結果: (a) 最適化前, (b) 線形弾性域における最適化構造, (c) 材料非線形域における最適化構造; (グラフ右の数字は最適化前の構造の荷重-変位曲線下側の面積を 100 とした時の比率を示す)

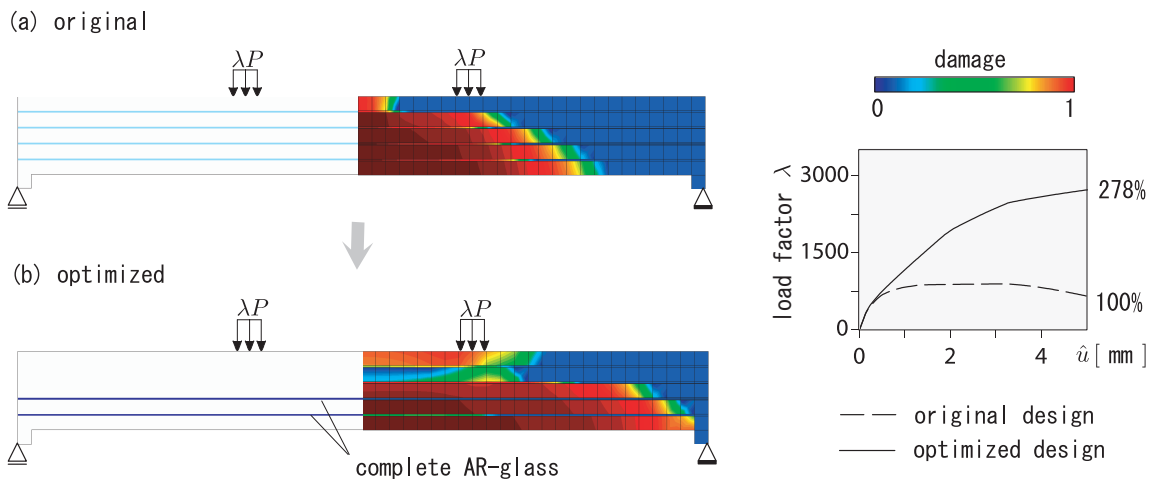


図-14 繊維材の太さを設計変数とした場合の最適化結果: (a) 最適化前, (b) 材料非線形域における最適化構造; (グラフ右の数字は最適化前の構造の荷重-変位曲線下側の面積を 100 とした時の比率を示す)

重制御点での節点変位  $\hat{u} (\equiv \hat{d}_j)$  は,  $-y$  方向にそれぞれ 0.05mm と 5mm である。

図-13 (a) は最適化前の初期構造, 同図 (b), (c) はそれぞれ線形弾性域と材料非線形域における最適化構造を示している。図-13 (a), (c) の梁右半分は, 変位 5mm における損傷程度 (損傷係数  $D$ ) を表している。

計算実行後, 目的関数の値は急激かつ滑らかに減少しながら最適化計算の繰返し回数が 60 回程度で最小値

近傍に近づき, その後は緩やかに減少しながら繰返し回数 150 回程度でほぼ一定値に到達したため, それをもって最適値に収束したと判断した。

得られた繊維配置を見ると, 線形弾性域では繊維材は曲げ剛性を向上させるために梁の上下端に移動しているのに対して, 非線形域では, 梁中央下面に集中するコンクリートの損傷を軽減するように繊維材が下側に多く配置されている様子がわかり, 力学的に妥当な構

造であると言える。そもそも AR-glass のヤング係数が高くないこと、また FRC の特徴の一つとして、使用する繊維材の量が少ないこともあり、線形弾性域では右図のグラフで示すように大きな変化はない。一方、材料非線形域では約 90% のエネルギー吸収能力が増加した。これは、コンクリートが損傷した箇所に比較的靱性の高い AR-glass 繊維が配置されたためであり、本手法が材料の非線形特性を適切に評価できることを裏付けるものである。

### (3) 最適化例 2: 繊維材の太さ

本節は、繊維材の太さを決定する最適化問題を扱う。繊維材の太さは、設計変数の大きさによって、長手方向の厚みを一定に保ちながら層全体として変化する。これより、各設計要素レイヤーが 1 つの設計変数、構造全体で 4 つの設計変数をもつ。設計変数の初期値はどのレイヤーも  $s = 0.5$  で設定し、その結果、繊維材の体積は構造全体の 4.5% となった。前節と同様に繊維材の総体積は最適化途中でも変化しないものとする。

図-14 は、材料非線形域における最適化結果を示している。最適化計算中における目的関数値の収束状態は、前節と同様に急激で滑らかに減少しながら最終的に繰り返し回数 120 回程度で最小値に到達した。梁の右半分は、前節と同様に変位 5mm における梁の損傷程度を表している。図-14 で示されるとおり、4 つの均等に配置された繊維材料は、梁中央下側の損傷領域を補強するように下側に移動した。その結果、梁右側の損傷図をみると、最適化前の構造では損傷領域が梁中央下側付近に局所的に集中しているのに対し、最適化後は損傷領域が梁全体に分散している様子がわかる。結果として、初期構造に比べ約 180% のエネルギー吸収能力が増加した。

なお、最適化された構造の荷重-変位曲線を見ると荷重極限点が現れず、耐荷力が急激に低下しない構造体に改善されたと言える。しかし、当然のことながら、これは変位制御点の所与の変位 5mm を想定した最適構造であり、その構造にさらに荷重を負荷し続けると荷重極限点が現れることは言うまでもない。

これらの結果より、本研究で提案した多層材料最適化手法によれば、力学の観点から理にかなう繊維材の配置を与え、材料非線形域における繊維複合材料のエネルギー吸収能力を着実に向上させ得ることが確認された。

## 10. 結論

本研究では FRC 構造のエネルギー吸収能力向上を目的とした多層材料最適化手法を提案し、数値解析例を

用いて本手法の妥当性を検証した。

本研究の成果は以下のとおりである。

- 2 層複合材料の損傷モデルを考慮した内挿関数を提案した。本手法により、線形弾性領域、材料非線形領域においても構造上合理的と考えられる構造が得られた。本手法は、特に材料非線形域において効果を発揮し、FRC 構造の課題の 1 つである脆性的な破壊挙動を回避する上で有用であると言える。
  - 材料非線形を考慮した最適化問題としては、塑性材料モデルを対象としたものが多いが損傷力学モデルを扱った研究は数少ない。本研究では、その経路依存型 (path-dependency) の構造問題に対して、変分解析直接法による一般性の高い感度解析手法の有効性を示した。
  - 本研究では、全ひずみを基本とする材料モデルを対象としたが、本最適化手法は増分ひずみを基本とする他の材料非線形モデルに対しても同様なアプローチで適用することができる。材料非線形モデルを考慮した構造最適化問題における、全ひずみと増分ひずみによる感度導出法の違いについては文献<sup>8)</sup>に詳細に述べられているので参考にされたい。
  - 本手法は、FRC という特殊な繊維複合材料を対象としたものであるが他の複合材料にも適用可能であると考えられる。
- 一方、今後の課題として以下が挙げられる。
- 固定した有限要素を用いたため繊維材は常に直線で、また、その配置場所は予め決められた設計要素レイヤーに限られるという制約がある。また、最適化を行った結果、設計要素レイヤーがコンクリートだけで満たされた場合、現実的には周囲のコンクリートマトリックス ( $\Omega_c$ ) と一体化しなければならないが、そこに界面の要素は残ってしまう。そのため、今後は繊維材の配置に際し、要素メッシュに依存しない、より自由度の高い手法の開発が望まれる。その方法としては、例えば level-set 法や埋込み要素という有限要素を用いて、繊維材の幾何を表現することができれば、これらの問題が改善されると思われる。
  - 感度解析において、損傷モデルの非局所等価ひずみの影響が考慮されていない。それを考慮することでより精度の高い感度解析を行うことが期待される。

謝辞: 本研究は、“Deutsche Forschungsgemeinschaft” DFG (German Research Foundation) の研究プロジェクト Ra 218/19 および Ra 218/21 の助成を受けて行わ

れたものである. この助成に心より感謝申し上げる.

# 参考文献

- 1) Bendsøe, M.P., Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 71, pp.197-224, 1988.
- 2) Bendsøe, M.P.: Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optim.*, Vol. 1, pp. 193-202, 1989.
- 3) Bendsøe, M.P., Sigmund, O.: *Topology Optimization, Theory, Method and Applications*, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2003.
- 4) Buggeda, G., Gil, L., Oñate, E.: Structural shape sensitivity analysis for nonlinear material models with strain softening, *Struct. Optim.*, Vol. 17, pp. 162-171, 1999.
- 5) Gibiansky, L.V., Sigmund, O.: Multiphase composites with extremal bulk modulus, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, pp. 461-498, 2000.
- 6) Gibson, L.J., Ashby, M.F.: *Cellular Solids: Structure and Properties*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1999.
- 7) Hammer, V.B.: Optimal laminate design subject to single membrane loads, *Struct. Optim.*, Vol. 17, pp. 65-73, 1999.
- 8) Kato, J.: *Material optimization for fiber reinforced composites applying a damage formulation*, Ph.D. dissertation, Institute of Structural Mechanics, University of Stuttgart, Germany, (<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/publications/index.html>), 2010.
- 9) Kato, J., Lipka, A., Ramm, E.: Preliminary investigation for optimization of fiber reinforced cementitious composite structures, In: *Proceedings of 3rd European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled problems in Engineering*, (eds. Mota Soares C.A. et al.), ECCM, Lisbon, Portugal, 2006.
- 10) Kato, J., Lipka, A., Ramm, E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 39, pp. 63-81, 2009.
- 11) Krüger, M., Ozbolt, J., Reinhardt, H.W.: A discrete bond model for 3D analysis of textile reinforced and prestressed concrete elements, *Otto-Graf-Journal*, Vol. 13, pp. 111-128, 2002.
- 12) Krüger, M., Ozbolt, J., Reinhardt, H.W.: A new 3D discrete bond model to study the influence of bond on the structural performance of thin reinforced and prestressed concrete plates, In: *Proceedings of High Performance Fiber Reinforced Cement Composites (HPFRCC4)*, (eds. Reinhardt, H.W. et al.), RILEM, Ann Arbor, USA, pp. 49-63, 2003.
- 13) Krüger, M., Xu, S., Reinhardt, H.W., Ozbolt, J.: Experimental and numerical studies on bond properties between high performance fine grain concrete and carbon textile using pull out tests, In: *Beiträge aus der Befestigungstechnik und dem Stahlbetonbau*, Festschrift Professor R. Eligehausen, Universität Stuttgart, pp. 151-164, 2002.
- 14) Lipka, A.: *Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung*, Ph.D. dissertation, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Deutschland, (<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/publications/index.html>), 2007.
- 15) Lipka, A., Ramm, E.: Optimization of foam filled structures using gradient algorithms. In: *Proceedings of the IUTAM Symposium, topoptSymp2005, Topological design optimization of structures, machines and materials status and perspectives*, (eds. Bendsøe, M.P. et al.), Copenhagen, Denmark, pp. 537-548, 2005.
- 16) Lipka, A., Schwarz, S., Ramm, E.: Topology optimization of three-dimensional structures with consideration of elastoplastic structural response. In: *Proceedings of 2nd European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled problems in Engineering*, (eds. Wąsaczyszyn, Z. et al.), ECCM, Cracow, Poland, 2001.
- 17) Maute, K., Schwarz, S., Ramm, E.: Adaptive topology optimization of elastoplastic structures, *Struct. Optim.*, Vol. 15, pp. 81-91, 1998.
- 18) Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G.: Continuum damage theory -application to concrete, *J. Eng. Mech.*, Vol. 115, pp. 345-365, 1998.
- 19) Olhoff, N., Lurie, K.A., Cherkashev, A.V., Fedorov, A.: Sliding regimes of anisotropy in optimal design of vibrating plates, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 17, No. 10, pp. 931-948, 1981.
- 20) Patnaik, S.N., Guptill, J.D., Berke, L.: Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 3087-3120, 1995.
- 21) Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., de Vree, J.H.: Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 3391-3403, 1996.
- 22) Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., Geers, M.G.D.: Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture, *Mech. Cohes-Frict. Mater.*, Vol. 3, pp. 323-342, 1998.
- 23) Peerlings, R.H.J.: *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*, Ph.D. dissertation, Faculty of Mechanical Engineering, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1999.
- 24) Rots, J.G.: *Computational modeling of concrete fracture*, Ph.D. dissertation, Technische Universiteit Delft, The Netherlands, 1988.
- 25) Schellekens, J.C.J.: *Computational modeling of concrete fracture*, Ph.D. dissertation, Technische Universiteit Delft, The Netherlands, 1992.
- 26) Schwarz, S., Maute, K., Ramm, E.: Topology and shape optimization for elastoplastic structural response, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 190, pp. 2135-2155, 2001.
- 27) Sigmund, O.: A new class of extremal composites, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, pp. 397-428, 2000.
- 28) Sigmund, O., Torquato, S.: Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No. 6, pp. 1037-1067, 1997.
- 29) Stegmann, J., Lund, E.: Discrete material optimization of general composite shell structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 62, pp. 2009-2027, 2005.
- 30) Swan, C.C., Kosaka, I.: Voigt-Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behaviors, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 3785-3814, 1997.
- 31) de Vree, J.H.P., Brekelmans, W.A.M., Gils, M.A.J.: Comparison of nonlocal approaches in continuum

- damage mechanics, *Comp. & Struct.*, Vol. 55, pp. 581–588, 1995.
- 32) Yuge, K., Kikuchi, N.: Optimization of a frame structures subjected to a plastic deformation, *Struct. Optim.*, Vol. 10, pp. 197–208, 1995.
- 33) Zhou, M., Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 89, pp. 309–336, 1991.

(2010. 11. 5 受付)

## MULTIPHASE MATERIAL OPTIMIZATION FOR FIBER REINFORCED COMPOSITES CONSIDERING STRAIN SOFTENING

Junji KATO, Ekkehard RAMM, Kenjiro TERADA and Takashi KYOYA

The present paper addresses an optimization strategy of textile fiber reinforced concrete (FRC) with emphasis on its special failure behavior. Since both concrete and fiber are brittle materials, a prominent objective for FRC structures is concerned with the improvement of structural ductility, which may be defined as energy absorption capacity. Despite above unfavorable characteristics, the interface between fiber and matrix plays a substantial role in the structural response. This favorable ‘composite effect’ is related to material parameters involved in the interface and the material layout on the small scale level. Therefore the purpose of the present paper is to improve the structural ductility of FRC at the macroscopic level applying an optimization method with respect to significant material parameters at the small scale level. The method discussed is based on multiphase material optimization. This methodology is extended to a damage formulation. The performance of the proposed method is demonstrated in a series of numerical examples; it is verified that the structural ductility can be considerably improved.