

損傷を受ける繊維複合材料の繊維形状最適化

加藤 準治¹・Ekkehard RAMM²・寺田 賢二郎³・京谷 孝史⁴

¹正会員 東北大学助教 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字 6-6-06)
E-mail: jkato@civil.tohoku.ac.jp

²Professor, University of Stuttgart (Pfaffenwaldring 7, 70569 Stuttgart, Germany)

³正会員 東北大学准教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字 6-6-06)

⁴正会員 東北大学教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字 6-6-06)

本研究は、繊維コンクリート (FRC) の繊維材の全体形状と位置を最適化する手法を提案するものである。FRC は、通常の鉄筋コンクリートに比べ板厚を極めて薄くできるという優れた長所があるものの、力学的挙動が複雑で一旦損傷が起きると急激に耐力力が低下するという問題がある。そこで、本研究は FRC の損傷後においても耐力力を安定的に最大限保持できるような構造に改善することを意図し、繊維材の全体形状と位置を最適化する手法を提案する。繊維材の幾何学的配置を最適化する従来の手法では有限要素レベルで繊維材の角度を定義するため、要素間で繊維が不連続となり、現実的な非線形材料挙動が評価できないのが問題である。本研究では、要素間で連続となる繊維材の表現方法を提案し、幾つかの数値解析実験により、本手法の妥当性を検証した。

Key Words : material shape optimization, material nonlinearity, fiber reinforced composites

1. はじめに

本研究は、土木建築分野で注目されている(長)繊維コンクリート (Textile Fiber Reinforced Concrete: 以下, FRC) に関する構造最適化問題を取り扱う。FRC は、ガラス、炭素、アラミド繊維等のフィラメントを束ね、高強度モルタルの中にそれを平行、もしくはメッシュ状に配置したものである。ガラス繊維は、モルタル(以下では便宜上コンクリートと呼ぶ)内でアルカリ反応を起こすため、通常、抗アルカリ反応の AR-glass 繊維 (Alkali-Resistance glass) が用いられる。また、繊維束はエポキシ樹脂等で充填接着することで繊維束内のフィラメントの滑りを極力抑えるように工夫されていることが多い。FRC は、繊維材の腐食の心配がないため、コンクリートによる厚いかぶりが不要で、結果的に薄肉軽量の複合構造を可能にする。

一方、コンクリートと繊維材は、ともに脆性的な破壊挙動を示すため、FRC 構造自体も同様の破壊挙動を示し、損傷後の耐力力が急激に低下するという問題がある。FRC を建設材料の構造主部材として使用するためには、損傷した後でも耐力力が急減に低下しない、エネルギー吸収力のある構造に改善することが必要である。

しかし、FRC の破壊メカニズムは、繊維束内のフィラメント間や繊維材-マトリックス間の界面挙動、繊維材の長さ、太さ、角度、位置、種類、マイクロレベルにおける界面の粗さや充填剤の特性等の多くのパラメータに強く依存することが報告されており^{11),12),13)}、経験的手法によってこれらのパラメータを変化させ、損傷

後の FRC の構造挙動を制御することは困難である。

この種の問題を解く数理的な方法の 1 つとして構造最適化手法がある。構造最適化手法は、設計におけるパワフルなツールとして様々な分野で活用されており、それをを用いることで例えば構造軽量化、剛性最大化、座屈荷重最大化等、経験的手法では解決できない高度な問題に対しても妥当な解を得ることが可能となる。しかしながら、構造最適化は数学的に複雑なプロセスを要し、また、構造解析に加え最適化の反復計算を実行するために数値計算量が多くなる。このような背景から、構造最適化に関する研究の多くは線形弾性域で単一材料からなる単純な構造に限定した問題を対象とし、本研究のような複合材料及びその材料非線形性の両方を考慮した最適化の研究は殆ど報告されていない。

著者らは、既往の研究⁹⁾で FRC の繊維材の太さ、長さ及び種類を設計変数とする、一般の有限要素法を用いた構造最適化手法を提案し、それによって FRC が損傷した後でも耐力力を安定的に最大限保持し続けるような構造へ改善することに成功している。しかし、一般の固定された有限要素を用いて細長い繊維材を離散化すると要素メッシュが複雑になることから、繊維材の配置を直線平行の単純なものに限定し、しかも所与の位置にしか繊維材を配置できないという制約下で最適化を行っている。これらの制約は繊維材の最適配置に大きな制限を課すものであり、繊維材の角度や位置も要素メッシュに依存せずに変数として扱うことのできる、設計自由度の高い最適化手法へ拡張することが

課題である。本研究は、これを可能にする手法を提案するものである。

ところで、繊維材の角度を最適化する研究についてはこれまで多く報告されているが、その多くが線形弾塑性域において積層繊維強化プラスチックの剛性を最大化するものである^{23),24)}。しかし、それらは大抵、有限要素レベルにおける繊維材の角度を設計変数にもつ直交異方性材料としてモデル化するため、繊維材が要素間で不連続となり、また、要素内における繊維材の位置や長さも考慮できないのが問題である。この簡便的な手法は、繊維複合材料の材料非線形問題等の、より現実的な力学的挙動の把握が必要となる問題に対しては十分なものではない。

これらを勘案し、本研究は、FRCが損傷した後も安定的に耐荷力を保持し続けるような構造に改善することを意図し、固定された要素メッシュに依存しない、かつ連続長繊維材の全体形状と位置を最適化する手法を提案する。具体的には、所与の変位に対して各有限要素の応力-ひずみ曲線で囲まれる面積を構造全体で積分したもの、すなわち内力による仕事を最大化するための最適化問題を定式化し、いくつかの数値計算例を用いて本手法の妥当性を検証する。本論文では、既往の研究⁹⁾と同様に、耐荷力を安定的に最大限保持することをFRCのエネルギー吸収力最大化と呼ぶことにする。

ここでは、埋込み要素^{1),2),5),7),8),22)}という特殊な要素を用い、繊維材の幾何学的配置を全体座標系で定義する。これにより、固定した要素メッシュに依存しない、連続な繊維材の幾何学的表現が可能となる。本研究では、全体形状が曲線となる繊維材を考慮した2次元構造モデルにBalakrishnanとMurray¹⁾の界面モデルを取り入れた埋込み要素を用いる。繊維材の全体形状については、ベジエ曲線を用いて近似する。繊維材とコンクリートの材料モデルについては、Peerlingsらが提唱する等方性損傷力学モデル^{19),20),21)}、繊維材-コンクリート間の界面の材料モデルについては、Krügerらの接合モデル^{11),12),13)}を用いた。但し、繊維束内のフィラメント間の界面特性については、エポキシ樹脂が良好に充填されることで大きな滑りは生じず、繊維束の断面内は均質な材料であると仮定する。

なお、本文中の上添え字 $(\bullet)^c$ 、 $(\bullet)^f$ 及び $(\bullet)^i$ は、それぞれ‘コンクリート’、‘繊維材’及び‘界面’を意味する。また、式によっては例えば $(\bullet)^{c+f} = (\bullet)^c + (\bullet)^f$ という簡潔な表現を用いる。下添え字 $(\bullet)_L$ 及び $(\bullet)_G$ は (\bullet) 内の値がそれぞれ繊維軸方向を示す局所座標及び全体座標で定義されたものであることを示す。但し、 $(\bullet)_G$ は強調する必要がある場合のみ表示する。

2. 材料モデル

(1) 繊維材とコンクリートの材料モデル

本研究では、繊維材とコンクリートの材料非線形特性をPeerlingsら^{19),20),21)}が提唱する等方性の損傷力学モデルを用いた。損傷モデルの構成式は、以下のように記される。

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbf{C}_{el} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{ed} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ は、それぞれコーシー応力テンソルおよび線形のひずみテンソルである。また、 \mathbf{C}_{el} 、 \mathbf{C}_{ed} は材料の線形弾性剛性テンソルおよび損傷を考慮した割線剛性テンソル、 D ($0 \leq D \leq 1$)は損傷変数と呼ばれ、それが1に近づくにつれて材料が損傷し、応力を伝達しなくなることを意味する。

一般に連続体損傷モデルでは、局所等価ひずみのみを用いて損傷度合を評価すると、損傷が生じた一部の有限要素のひずみが過度に増大し、物理的に意味のない結果が得られることが知られている¹⁹⁾。そのため、本研究では非局所等価ひずみを考慮することでその問題を改善している。

まず、コンクリートには次式で示される、de Vree²⁵⁾の局所等価ひずみ ε_v^c を用いた。

$$\varepsilon_v^c(I_1, J_2) = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 - \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2} \quad (2)$$

ここで、 I_1 、 J_2 はひずみテンソルの1次不変量および偏差ひずみテンソルの2次不変量を意味する。 ν はポアソン係数、 k は圧縮強度の引張強度に対する比である。

一方、繊維材については1次元モデルを想定しているため、簡易な表現で示されるMazarsとPijaudier-Cabot¹⁴⁾の定義に従った。

$$\varepsilon_v^f = \sqrt{\langle \varepsilon_L^f \rangle^2} \quad (3)$$

ここで、 ε_L^f は繊維材の軸方向ひずみを示し、 $\langle \bullet \rangle$ はMacauleyブラケット $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ である。

次に損傷変数 D は、MazarsとPijaudier-Cabot¹⁴⁾の関係式、

$$D(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \left(1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \right) \quad \text{if } \kappa \geq \kappa_0 \quad (4)$$

に従った。ここで、 α は応力の終局状態を決める定数、 β は損傷進展速度を支配する定数、 κ_0 は損傷が発生する境界を示す初期等価ひずみである。 κ は、材料がこれまでに受けた最も大きい損傷変形を示す変数である。なお、コンクリートと繊維材の両方で共通の式を用いる場合は、上添え字c,fを省略する。

一般の簡易な損傷モデルでは、以下の荷重状態関数

$$\Psi(\varepsilon_v, \kappa) = \varepsilon_v - \kappa \quad (5)$$

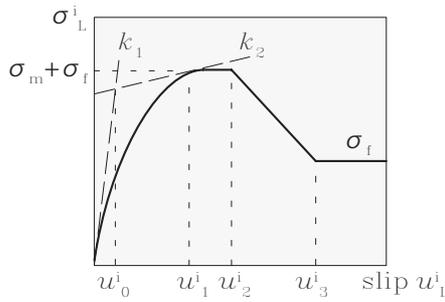


図-1 コンクリートと繊維材束間の界面の不連続結合モデル

を定義し、局所等価ひずみのみで損傷の進展を判定する。具体には、 κ と ε_v を関係づけ、その κ を以下の Kuhn-Tucker 条件式に当てはめることで問題を解く。

$$\Psi \dot{\kappa} = 0, \quad \Psi \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad (6)$$

一方、非局所等価ひずみを用いた損傷モデルの場合、式 (5) の局所等価ひずみ ε_v を以下で近似される非局所等価ひずみ $\tilde{\varepsilon}_v$ で置き換えることで κ と関係づける。

$$\tilde{\varepsilon}_v - c \nabla^2 \tilde{\varepsilon}_v = \varepsilon_v \quad (7)$$

ここで、 ∇^2 はラプラス演算子を示し、 c は変形の局所化を近似するための長さ単位をもつ正の定数である。当該材料モデルの特徴は、式 (7) で示されるように、非局所等価ひずみ $\tilde{\varepsilon}_v$ が局所等価ひずみ ε_v と陰的に関連づけながら近似されている点にある。

(2) 界面の材料特性

繊維束とコンクリートとの界面における材料特性については、Krüger らが提唱する接合モデル¹¹⁾を用いた。このモデルは、炭素繊維束と AR-glass 繊維束を使った引抜き実験によって得られたもので、繊維材が界面において長手方向に滑る単純な 1 次元モデルである。その応力-すべり関係 ($\sigma_L^i - u_L^i$) は次のように記される。

$$\sigma_L^i = \tilde{u}^i \cdot \left\{ b + (1-b) \cdot \left(\frac{1}{1 + \tilde{u}^i R} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \cdot \sigma_0 \quad \text{for } u_L^i \leq u_1^i \quad (8)$$

ここで、 u_L^i は界面の繊維方向における滑り長さ、 $\tilde{u}^i (= u_L^i / u_0^i)$ は滑り比、 u_0^i は初期剛性 k_1 によって決定される滑り長さを示す (図-1)。 k_2 は、界面の付着応力が最大付着強度に達するすべり長さ u_1^i における接線剛性を示す。 $b = k_2 / k_1$ と $\sigma_0 = k_1 \cdot u_0^i$ は応力を計算するためのパラメータ、 R_s は u_1^i における曲率である。 $u_L^i > u_1^i$ の領域における応力-すべり関係は、界面における付着強度 σ_m と摩擦強度 σ_f を用いて以下のように記される。

$$\sigma_m = \sigma_{m,0} \psi, \quad \sigma_f = \sigma_{f,0} \psi \quad (9)$$

ここで、

$$\psi = 1 + \tanh \left[\alpha_r \frac{\sigma_R}{0.1 f_c} - \alpha_f \nu \varepsilon_s \left(1 - \frac{r_s^2}{(r_s + h)^2} \right)^{-1} \right] \quad (10)$$

である。上式の $\psi (1 < \psi < 2)$ は、繊維材の表面粗さ等を考慮する付加的な係数である。 $\sigma_{m,0}$ と $\sigma_{f,0}$ は、それぞれ初期付着強度、初期摩擦強度、 r_s は繊維束の半径、 ν は繊維材のポアソン係数、 h は繊維材の表面粗さを示す。また、 α_r と α_f は繊維材の中心半径方向の変形を考慮する係数である。 f_c は、コンクリートの一軸圧縮強度、 ε_s は繊維材の長手方向のひずみ、 σ_R は繊維材軸芯に垂直に作用する応力を意味する。当該界面モデルの詳細は、文献^{11),12),13)}を参照されたい。

3. 埋込み要素を用いた連続長繊維材の幾何学的表現方法

(1) 連続長繊維材の幾何学的表現と設計変数

FRC 内の繊維材は、コンクリートの厚いかぶりを必要とせず、また鉄筋と異なり繊維材両端にフックがないため、直線もしくはメッシュ状のシンプルな配置となる。また、繊維材はフレキシブルであるため、緩やかな曲線形状を持たせることもできる。

これを踏まえ、本研究ではベジエ曲線で繊維材の形状を近似した。図-2 (a) は、例として 2 次のベジエ曲線を記している。 \mathbf{r} は曲線の位置ベクトル、 $\vartheta (0 \leq \vartheta \leq 1)$ は曲線の局所座標、 p_j は、 j 番目の制御点である。

本手法の概念は、このベジエ曲線で定義された繊維材を構造の中に埋め込み、その制御点を動かすことで最適な繊維材のレイアウトを得るものである。まず、図-2 で示されるように構造全体の領域をパラメータ空間 $s (0 \leq s \leq 1)$ で表す。それゆえ、正規化された制御点の座標は、全体座標系で表した実際の繊維材の幾何を決定する設計変数として定義できる。これに従い、 j 番目の制御点 p_j の位置ベクトルは次のように書くことができる。

$$\mathbf{r}_j (s_j^x, s_j^y) = \mathbf{O} (\hat{x}, \hat{y}) + (s_j^x L_x, s_j^y L_y) \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{O} はその構造の基準点を意味し、 \hat{x}, \hat{y} はそれに対応する \mathbf{O} の全体座標である。 L は構造の外部長さ、 L と s の添え字 x, y はそれぞれその方向を意味する。式 (11) をベジエ曲線の一般式に代入すると、設計変数 \mathbf{s} を含む繊維材の幾何に関する式は以下のように書ける。

$$\mathbf{r} (\vartheta, s^x, s^y) = \sum_{j=0}^{n_b} \Phi_j (\vartheta) \mathbf{r}_j (s_j^x, s_j^y) \quad \text{with } \Phi_j = \frac{n_b!}{(n_b - j)! j!} \vartheta^j (1 - \vartheta)^{n_b - j} \quad (12)$$

上式の n_b はベジエ曲線の次数、 Φ はその係数である。

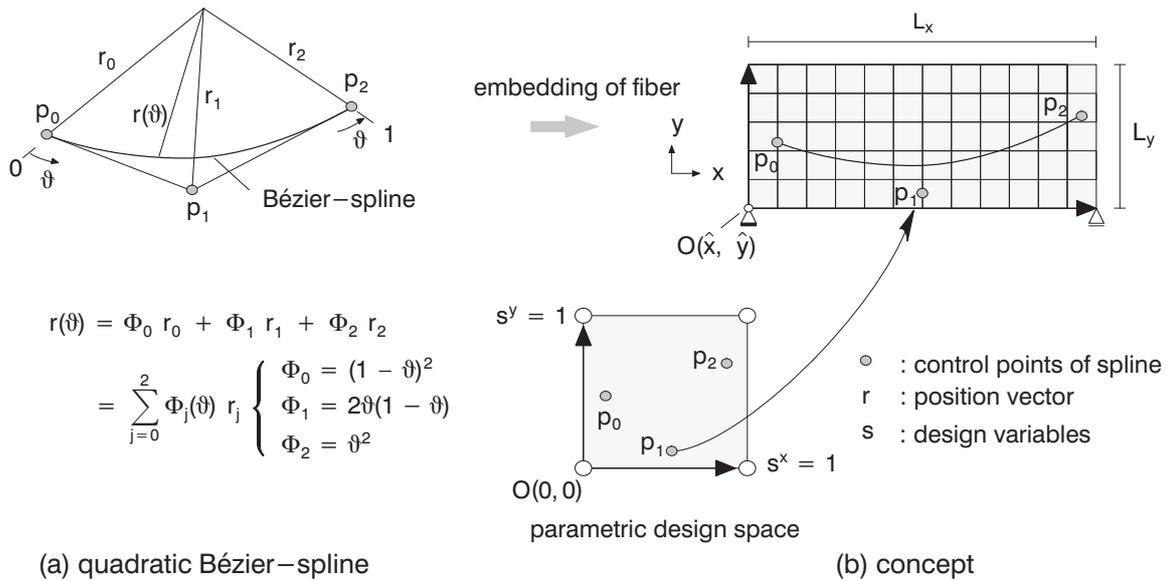


図-2 (a) 2 次のベジエ曲線, (b) 本手法の概念

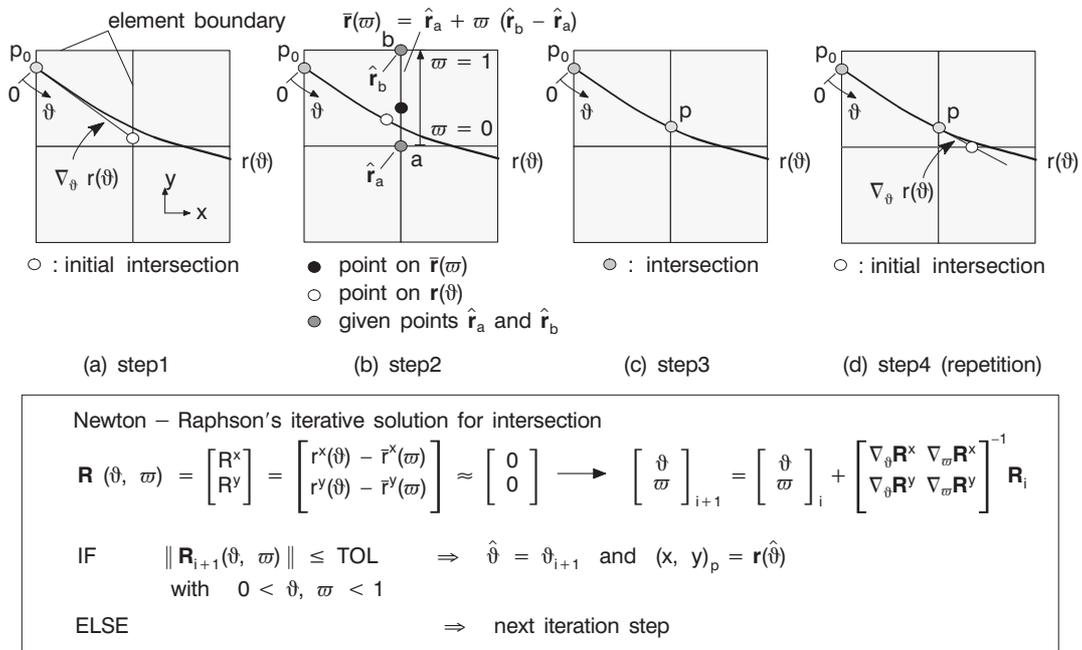


図-3 交点の決定手順を示すパッチと Newton-Raphson 法によるアルゴリズム

(2) 要素メッシュと繊維材の交点の決定方法

式 (12) で一旦繊維材の形状が決定すれば、繊維材と有限要素メッシュの交点座標を求めることができる。交点座標は、後で埋込み要素の剛性マトリックスや内力ベクトルを計算するのに必要となる。そこで、図-3 を参考にしながら要素メッシュと繊維材との交点座標を決定する過程を以下に記す。

Step1:

- (1.1) 制御点 p_0 の位置ベクトル $r_0(\vartheta)$ を求める。
- (1.2) p_0 における勾配 $\nabla_{\vartheta} r(\vartheta)$ を計算する。

- (1.3) 要素境界線と (1.2) の勾配の交点座標を求める。

Step2:

- (2.1) 節点 a, b 間の要素境界線を変数 ϖ ($0 \leq \varpi \leq 1$) でパラメータ化する。
- (2.2) Newton-Raphson 法で全体交点座標 $(x, y)_p$ を決定する (図-3 の box)。ここで \mathbf{R} は、位置ベクトル $r(\vartheta)$ と $\bar{r}(\varpi)$ の残差である。

Step3:

- (3.1) (2.2) で収束した場合、交点 p の座標を $(x, y)_p = r(\hat{\vartheta})$ とおく。

(3.2) (2.2) で収束しなかった場合, 同じ要素の別の要素境界線に移動し, (2.1) から再スタートする.

Step4:

(4.1) 上記の p_0 を得られた交点 p で置き換え, 新しい勾配 $\nabla_{\theta} r(\hat{\theta})$ で (1.2) から同じ過程を繰り返す.

この作業は, 繊維材の端部に到達するまで行われる. なお, 繊維材の局所座標系 θ とパラメータ ω は, 交点座標を求めるために用いられたもでのあり, これ以降は不要となる. また, ここでは煩雑さを避けるために要素内の繊維は直線であると仮定し, その結果, 繊維の全体形状は連続多角線となる. 最後にこの全体座標 $(x, y)_p$ は自然座標 $(\xi, \eta)_p$ に逆写像変換しておく必要がある. この作業は, 非線形逆写像と言われ, 詳細は文献¹⁰⁾を参考にされたい.

(3) 埋込み要素

本研究では, コンクリートと繊維材の界面における幾何学上の特性として, Balakrishnan と Murray¹⁾が提案する相対変位の仮定に従った. この仮定では, ある任意の点におけるすべりとは, 繊維材の軸方向に測った, コンクリートと繊維材間の相対変位を言い (図-4 参照), 次のように書くことができる.

$$u_L^f = u_L^c + u_L^i \quad (13)$$

ここで u_L^i は, 相対変位, あるいは滑り長さであり, 式 (8) で紹介されたものである. u_L^f と u_L^c は, 着目している点で繊維軸方向に測った, 繊維材とコンクリートの変位である.

繊維材の連続性を保持するには, 隣接する埋込み要素間において変形後の滑りも連続でなければならない. ここでは多角線の繊維材を想定しているため, 少なくとも滑り長さ u_L^i の 1 成分, 例えば全体座標系の x 軸に投影した \bar{d}

$$\bar{d} = \cos \theta \cdot u_L^i \rightarrow u_L^i = \bar{t} \bar{d} \quad \text{with} \quad \bar{t} = (\cos \theta)^{-1} \quad (14)$$

が隣接要素間で適合するように強制する必要がある. ここで θ は繊維材軸線と x 軸との角度である.

また, 式 (13) の関係からひずみについても以下の関係が得られる.

$$\varepsilon_L^f = \underbrace{\varepsilon_L^c}_{\mathbf{T}_1^e \varepsilon_G^c} + \varepsilon_L^i \quad (15)$$

ここで, ε_L^f , ε_L^c , ε_L^i は, それぞれ繊維材, コンクリート, 界面における繊維軸方向のひずみである. なお, 界面のひずみ ε_L^i については, 有限要素法に組み込むことを考慮して疑似的に定義されたものであり, 物理的に特別な意味合いを有するものではない. \mathbf{T}^e は, 平面応力状態の全体座標系のひずみ ε_G を局所座標系のひずみ ε_L に変換する行列 (付録参照), \mathbf{T}_1^e は, \mathbf{T}^e の第 1 行を

表す. 次章では, これらの関係式を使って FRC の仮想仕事を定式化する.

4. FRC の有限要素式

(1) 仮想仕事式

FRC の仮想仕事は, 以下に示すようにコンクリート, 繊維材及びそれらの界面毎に分けることができる.

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} \\ &= \delta W_{\text{int}}^c + \delta W_{\text{int}}^f + \delta W_{\text{int}}^i - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

ここで, δW_{int}^c , δW_{int}^f 及び δW_{int}^i は, それぞれコンクリート, 繊維材及びその界面における内力の仮想仕事を意味し, δW_{ext} は外力による仮想仕事である. また, 本研究で用いる損傷材料モデルは, 通常の変位場に加え, 非局所等価ひずみ場を変数とした合計 2 つの系で構成される仮想仕事式で表現される. その仮想仕事の一般式は, コンクリートと繊維材の両方に用いられることを考慮して $\Omega = \Omega^c \cup \Omega^f$ とし, 時間 $t + 1$ について次式のように与えられる.

$$\begin{aligned} \delta W_u^{c+f}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{b}} \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W_e^{c+f}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_v, \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_v) &= \int_{\Omega} \delta \nabla \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_v \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_v (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_v - \boldsymbol{\varepsilon}_v(\boldsymbol{\varepsilon})) \, d\Omega = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

ここで, 式 (17) は変位場に関する一般的な仮想仕事式, 式 (18) は非局所等価ひずみに関する仮想仕事式である. なお, ここで言う時間 t とは, 実際の時間ではなく準静的構造問題の荷重ステップ数, あるいは変位制御ステップ数を意味する. $\delta \mathbf{u}$ と $\delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_v$ は, それぞれ仮想変位場及び仮想非局所等価ひずみ場, $\hat{\mathbf{b}}$ と $\hat{\mathbf{t}}$ は, 基準の物体力と表面力である. また, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} \nabla \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_v$ は, 文献^{19),20),21)}で紹介される, 仕事等価応力ベクトルと呼ばれるものである. なお, 簡単のため以下では物体力項を省略する. 式 (17), (18) を更に詳しく見るために, それらをコンクリートと繊維材の仮想仕事 $\delta W_{u/e}^c$ と $\delta W_{u/e}^f$ に区分する. コンクリートの内力に関する仮想仕事については, 式 (17), (18) と同じ形式であるが, 繊維材は埋込み要素の中で 1 次元で表現されているので, その内力に関する仮想仕事は次式の繊維材軸方向 1 次元の式

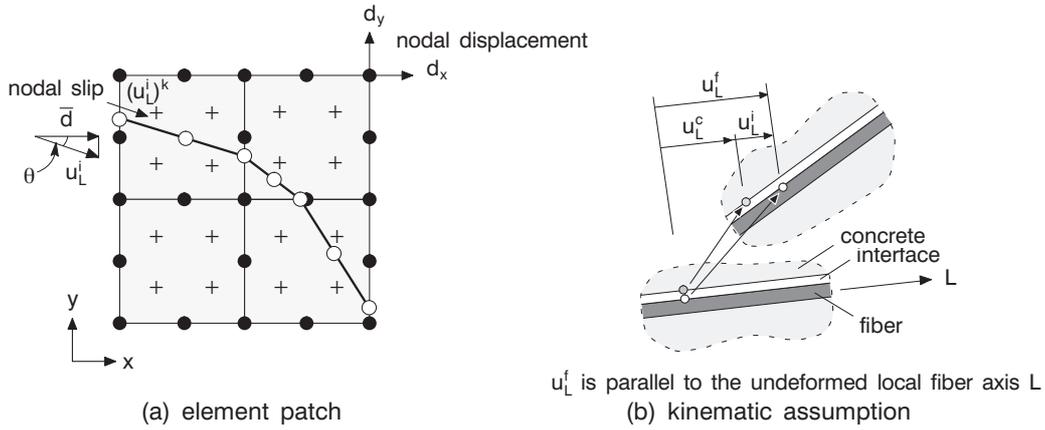


図-4 (a) 埋込み要素のパッチ, (b) 滑り長さの概念

に縮小できる.

$$\delta W_{u, \text{int}}^f = \int_{\Omega^f} \delta \varepsilon_L^f \sigma_L^f d\Omega^f = \int_{\Omega^f} (\delta \varepsilon_L^c + \delta \varepsilon_L^i) \sigma_L^f d\Omega^f \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta W_e^f &= \int_{\Omega^f} \delta \nabla \tilde{\varepsilon}_{v, L}^f \tau_L^f d\Omega^f \\ &+ \int_{\Omega^f} \delta \tilde{\varepsilon}_{v, L}^f (\tilde{\varepsilon}_{v, L}^f - \varepsilon_{v, L}^f (\varepsilon_L^f)) d\Omega^f \quad (20) \end{aligned}$$

最後に、界面に関する仮想仕事 δW_{int}^i の内容を具体的に記す. 繊維材のひずみ ε_L^i は式 (15) に従うと、式 (19) に示すようにコンクリートの局所ひずみ ε_L^c と界面のひずみ ε_L^i に分割できる. そのため、滑り u_L^i に関する界面の仮想仕事式は、界面内の仮想仕事 $\int_{\Omega^i} \delta u_L^i \sigma_L^i d\Omega^i$ とともに次式で与えられる.

$$\delta W_{\text{int}}^i = \int_{\Omega^f} \delta \varepsilon_L^i \sigma_L^f d\Omega^f + \int_{\Omega^i} \delta u_L^i \sigma_L^i d\Omega^i = 0 \quad \forall \delta u_L^i \quad (21)$$

上式は、界面が繊維材に与える仮想仕事と界面内の仮想仕事とが界面領域全体で釣り合うことを意味している.

(2) 離散化

本研究では平面応力状態を想定し、コンクリートの変形は 8 節点四辺形要素、非局所等価ひずみはバイリニアの形状関数を用いて離散化する. また、界面の滑りについては、2 次の 3 節点 1 次元要素 ($n_i = 3$) を用

いる.

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k \mathbf{d}^k \quad \text{or} \quad \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (22)$$

$$\tilde{\varepsilon}_v = \sum_{k=1}^{n_e} \tilde{N}_k \mathbf{e}^k \quad \text{or} \quad \tilde{\varepsilon}_v = \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{e} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u_L^i &= \sum_{k=1}^{n_i} N_k^i (u_L^i)^k = \sum_{k=1}^{n_i} N_k^i (\bar{t} \bar{d})^k \\ &= \sum_{k=1}^{n_i} \bar{N}_k \bar{d}^k \quad \text{or} \quad u_L^i = \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{d}} \quad (24) \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{d} は 8 節点の要素変位ベクトル、 \mathbf{e} は非局所等価ひずみベクトルで四辺形要素のコーナー 4 節点の値を持つ. $\bar{\mathbf{d}}$ は 3 節点の滑り長さを示すベクトルで、 x 軸に斜影された滑り長さの 3 成分から成る.

$$\bar{\mathbf{d}} = [\bar{d}^1 \quad \bar{d}^2 \quad \bar{d}^3]^T \quad (25)$$

$\bar{\mathbf{N}}$ は、全体座標系で定義された界面の形状関数である. また、式 (15) 内の繊維軸方向の界面のひずみ ε_L^i は、以下のように書ける.

$$\varepsilon_L^i = \sum_{k=1}^{n_i} B_k^i (\bar{t} \bar{d})^k = \bar{\mathbf{t}} \mathbf{B}^i \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{d}} \quad (26)$$

ここで \mathbf{B}^i と $\bar{\mathbf{B}}$ は、それぞれ界面の局所座標と全体座標で定義された B マトリックスを指す. 局所座標系の繊維材のひずみ ε_L^f は式 (15) に従い、次のようになる.

$$\varepsilon_L^f = \mathbf{T}_1^e \varepsilon_G^c + \varepsilon_L^i = \mathbf{T}_1^e \mathbf{B}^f \mathbf{d} + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{d}} \quad (27)$$

最後に式 (22), (23), (24) を仮想仕事式に代入すると次のように整理できる。

$$\begin{aligned} \delta W_u &= \delta W_{u, \text{int}}^c + \delta W_{u, \text{int}}^f - \delta W_{\text{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{d} \\ &= \bigcup_{m=1}^{n_{\text{ele}}} \delta \mathbf{d}^T \left[\underbrace{\int_{\Omega^c} \mathbf{B}^{cT} \boldsymbol{\sigma}^c d\Omega^c}_{\mathbf{f}_{\text{int}, u}^c} + \underbrace{\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^{fT} (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \sigma_L^f d\Omega^f}_{\mathbf{f}_{\text{int}, u}^f} \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{t+1} \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^{cT} \mathbf{t}_0 d\Gamma}_{\mathbf{f}_{\text{ext}}} \right] = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \delta W_e^c + \delta W_e^f = \bigcup_{m=1}^{n_{\text{ele}}} \delta \mathbf{e}^T \\ &\cdot \left[\underbrace{\int_{\Omega^c} (\tilde{\mathbf{B}}^c)^T \boldsymbol{\tau}^c d\Omega^c + \int_{\Omega^c} (\tilde{\mathbf{N}}^c)^T (\tilde{\varepsilon}_v^c - \varepsilon_v^c) d\Omega^c}_{\mathbf{f}_{\text{int}, e}^c} \right. \\ &\quad + \bigcup_{m=1}^{n_{\text{ele}}} \delta \mathbf{e}^T \left[\int_{\Omega^f} (\tilde{\mathbf{B}}^f)^T (\mathbf{T}_1^d)^T \tau_L^f d\Omega^f \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\Omega^f} (\tilde{\mathbf{N}}^f)^T (\tilde{\varepsilon}_{v, L}^f - \varepsilon_{v, L}^f) d\Omega^f \right] \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{e} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^i &= \bigcup_{m=1}^{n_{\text{ele}}} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \left[\underbrace{\int_{\Omega^f} \bar{\mathbf{B}}^T \sigma_L^f d\Omega^f + \int_{\Omega^i} \bar{\mathbf{N}}^T \sigma_L^i d\Omega^i}_{\mathbf{f}_{\text{int}, i}^i} \right] = 0 \\ &\quad \forall \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (30) \end{aligned}$$

ここで、式 (29) 下段の [] 内を便宜上 $\mathbf{f}_{\text{int}, e}^f$ とおく。式 (28) の λ_{t+1} は、所与の表面荷重ベクトル \mathbf{t}_0 に対する、時間 $t+1$ における荷重係数であり、非線形（準静的）構造解析問題の荷重-変位関係の耐荷力を表す係数である。 \mathbf{B}^c は通常の B マトリックス、 $\tilde{\mathbf{B}}^c$ 、 $\tilde{\mathbf{B}}^f$ は以下の非局所等価ひずみ勾配を与えるコンクリートと繊維材の B マトリックスである。

$$\nabla \tilde{\varepsilon}_v^c = \tilde{\mathbf{B}}^c \mathbf{e} \quad (31)$$

$$\nabla \tilde{\varepsilon}_{v, L}^f = \mathbf{T}_1^d \nabla \tilde{\varepsilon}_{v, G}^f = \mathbf{T}_1^d \tilde{\mathbf{B}}^f \mathbf{e} \quad (32)$$

\mathbf{T}_1^d は、回転マトリックス \mathbf{T}^d の第 1 行を指す (付録参照)。

(3) 剛性方程式

前節の 3 つの仮想仕事式を \mathbf{d} , \mathbf{e} 及び $\bar{\mathbf{d}}$ に関して線形化し、要素全体で集めて整理すると以下の剛性方程式

が得られる。

$$\begin{aligned} &\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{c+f} & \mathbf{K}_{de}^{c+f} & \mathbf{K}_{dd}^f \\ \mathbf{K}_{ed}^{c+f} & \mathbf{K}_{ee}^{c+f} & 0 \\ \mathbf{K}_{dd}^f & 0 & \mathbf{K}_{dd}^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_T} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{e} \\ \Delta \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{u}} \Bigg|^{n+1} \\ &= - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int}, u}^c + \mathbf{f}_{\text{int}, u}^f - \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \mathbf{f}_{\text{int}, e}^c + \mathbf{f}_{\text{int}, e}^f \\ \mathbf{f}_{\text{int}, i}^i \end{bmatrix}}_R \Bigg|_n \quad (33) \end{aligned}$$

ここで \mathbf{K}_T と \mathbf{R} は、それぞれ接線剛性マトリックスと残差ベクトルを意味する。 $\Delta \mathbf{u}$ は、節点変位、等価ひずみ及びすべりの 1 荷重ステップ内の増分を 1 つのベクトルで表したもので、簡単のためここでは節点変位ベクトルの増分と呼ぶ。 \mathbf{u} という表記は、式 (22) のそれと重複するが表記の簡潔化を図り、これ以降は式 (33) のように等価ひずみとすべりを含めたもの、すなわち $\mathbf{u}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \bar{\mathbf{d}})$ を指すこととする。上添え字 n は、ある 1 増分ステップ内の反復計算回数である。なお、 \mathbf{K}_T 内の各成分は、節 6.(4)~(6) で紹介する。

5. FRC の最適化問題

(1) 最適化問題の定式化

本研究で取り扱う問題は、等式制約条件付きの最適化問題であり、その目的関数を $f(\hat{\mathbf{s}})$ 、等式制約条件を $h(\hat{\mathbf{s}})$ と表す。 $\hat{\mathbf{s}}$ は、設計変数ベクトルを意味する。

本研究は、構造全体で繊維材の量が常に一定であるという条件下で、FRC 構造のエネルギー吸収性能最大化を目的とする。構造解析については、材料のひずみ軟化特性を考慮して変位制御法により行う。ちなみに、FRC の繊維材混入率は一般に体積比で数パーセント以下であり、他の繊維強化プラスチックのような複合材料と比較してもはるかに少ない。これより、FRC においては繊維材量最少化の必要性は低く、ここでは簡単に繊維材量を一定とする等式制約条件付きの最適化問題を考える。

前述のとおり、エネルギー吸収性能は各有限要素の応力-ひずみ曲線で囲まれる面積を構造全体で積分したもの（内力による仕事）として定義し、当該最適化問題を以下のように定式化した。

$$\min f(\hat{s}) = - \left[\int_{\Omega^c} \int_{\hat{\varepsilon}^c} \boldsymbol{\sigma}^c d\varepsilon^c d\Omega^c + \int_{\Omega^f} \int_{\hat{\varepsilon}_L^f} \sigma_L^f d\varepsilon_L^f d\Omega^f + \int_{\Omega^i} \int_{\hat{u}_L^i} \sigma_L^i du_L^i d\Omega^i \right] \quad (34)$$

$$h(\hat{s}) = \bigcup_{m=1}^{n_{\text{ele}}} \int_{\Omega_\xi^f} \underbrace{|\mathbf{J}^f|}_{l r_0} d\Omega_\xi^f - \hat{V} = 0 \quad (35)$$

$$\hat{s}_L \leq \hat{s}_i \leq \hat{s}_U \quad i = 1, \dots, n_s \quad (36)$$

ここで、 ξ は自然座標空間、 $|\mathbf{J}^f|$ は繊維材のヤコビ行列の行列式である。 r_0 は繊維材の太さを意味し、長さ方向に一定であると仮定する。 l は、埋込み要素内の一本の繊維材の直線長さで設計変数 \hat{s} に依存する。 \hat{V} は予め決められた構造全体の繊維材総体積、 \hat{s}_L と \hat{s}_U は設計変数の下限と上限値、 n_s は設計変数の数を意味する。

なお、本論文では変位制御法で得られた節点変位ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \bar{\mathbf{d}})$ を必要に応じて $\hat{\mathbf{u}}$ と表し、 $\hat{\varepsilon}^c$ および $\hat{\varepsilon}_L^f$, \hat{u}_L^i の (\bullet) は、単にその節点変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ から求められたものであることを意味する。

最適化計算については、微分法に基づき最適性規準法(OC法)¹⁸⁾によるアルゴリズムを用いて行う。OC法は、Lagrangeの未定乗数法とKKT条件の最適性規準を基本とし、発見的手法によってその最適解を算出するアルゴリズムであり、数値解析上の安定性と速さから広く用いられている。OC法では、目的関数と等式制約条件の設計変数 \hat{s} に対する感度を求め、それを基に所定のアルゴリズムによる繰り返し計算を通じて最適解に近づけるものである。そのため、次章では必要となる目的関数と等式制約条件の感度の導出方法について詳述する。

6. 感度の導出

(1) 概要

目的関数は、構造応答を示す次の3つ変数 $\mathbf{u}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \bar{\mathbf{d}})$ と設計変数 \hat{s} に依存する。また、構造応答である変位 \mathbf{u} も設計変数 \hat{s} に依存するので、目的関数の設計変数 \hat{s} に関する全微分は次式で表される。なお、本論文では以下に示すとおり、 \hat{s} の代わりに s を用いて微分項を表すことで式の表現を簡略化している。

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{s}, \mathbf{u}) &= \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \\ &= \nabla_s f + \nabla_{\mathbf{u}} f^T \nabla_s \mathbf{u} \\ &= \nabla_s f + \nabla_{\mathbf{d}} f^T \nabla_s \mathbf{d} + \nabla_{\mathbf{e}} f^T \nabla_s \mathbf{e} + \nabla_{\bar{\mathbf{d}}} f^T \nabla_s \bar{\mathbf{d}} \quad (37) \end{aligned}$$

上式の右辺第1項は、陽的に直接求めることができる微分項であるが、残りの微分項は(陰的に)間接的にし

か求めることができないため、離散化された仮想仕事式(28), (29), (30)を用いてこれを導き出すことになる。本研究では、(準)解析的直接微分法(variational semi-analytical direct method)によりそれらを導出する。なお、以降は陽的に直接求められる微分項を簡単に $\nabla_s^{\text{ex}}(\bullet)$ (explicitの意味)、間接的にしか求められない項を必要に応じて、 $\nabla_s^{\text{im}}(\bullet)$ (implicitの意味)と表現する。

(2) 構成式の微分

まず各変数の設計変数に関する微分を求める。ここで得られた微分項は、構成式を微分する際に用いられる。

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ コンクリートと繊維材のひずみ } \varepsilon_L^c, \varepsilon_L^f, \\ \nabla_s \varepsilon^c(\mathbf{d}) &= \nabla_s^{\text{ex}} \varepsilon^c + \nabla_s^{\text{im}} \varepsilon^c = \underbrace{\nabla_s(\mathbf{B}^c)}_{=0} \mathbf{d} + \mathbf{B}^c \nabla_s \mathbf{d} \quad (38) \end{aligned}$$

$$\nabla_s \varepsilon_L^f = \nabla_s \varepsilon_L^c + \nabla_s \varepsilon_L^i \quad (39)$$

ここで、コンクリートと界面の繊維軸方向のひずみはそれぞれ $\varepsilon_L^c = \varepsilon_L^c(\mathbf{B}^f(\hat{s}), \mathbf{T}_1^e(\hat{s}), \mathbf{d})$, $\varepsilon_L^i = \varepsilon_L^i(\bar{\mathbf{B}}(\hat{s}), \bar{\mathbf{d}})$ と表わされるため、その微分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla_s \varepsilon_L^c &= \nabla_s^{\text{ex}} \varepsilon_L^c + \nabla_s^{\text{im}} \varepsilon_L^c \quad (40) \\ &= \underbrace{\nabla_s(\mathbf{T}_1^e) \mathbf{B}^f \mathbf{d} + \mathbf{T}_1^e \nabla_s(\mathbf{B}^f) \mathbf{d}}_{\text{explicit}} + \underbrace{\mathbf{T}_1^e \mathbf{B}^f \nabla_s \mathbf{d}}_{\text{implicit}} \end{aligned}$$

$$\nabla_s \varepsilon_L^i = \nabla_s^{\text{ex}} \varepsilon_L^i + \nabla_s^{\text{im}} \varepsilon_L^i = \nabla_s(\bar{\mathbf{B}}) \bar{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{B}} \nabla_s \bar{\mathbf{d}} \quad (41)$$

- 局所座標系の滑り長さ u_L^i

$$\begin{aligned} \nabla_s u_L^i(\bar{\mathbf{N}}(\hat{s}), \bar{\mathbf{d}}) &= \nabla_s^{\text{ex}} u_L^i + \nabla_s^{\text{im}} u_L^i \\ &= \nabla_s(\bar{\mathbf{N}}) \bar{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{N}} \nabla_s \bar{\mathbf{d}} \quad (42) \end{aligned}$$

- 局所及び非局所等価ひずみ ε_v , $\tilde{\varepsilon}_v$ と非局所等価ひずみ勾配 $\nabla \tilde{\varepsilon}_v$

- コンクリート

$$\varepsilon_v^c = \varepsilon_v^c(I_1(\varepsilon^c), J_2(\varepsilon^c)) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \varepsilon_v^c &= \nabla_{\varepsilon} \varepsilon_v^c (\nabla_s^{\text{ex}} \varepsilon^c + \nabla_s^{\text{im}} \varepsilon^c) \\ &= \nabla_{\varepsilon} \varepsilon_v^c \underbrace{(\nabla_s(\mathbf{B}^c) \mathbf{d} + \mathbf{B}^c \nabla_s \mathbf{d})}_{=0} \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \tilde{\varepsilon}_v^c &= \nabla_s^{\text{ex}} \tilde{\varepsilon}_v^c + \nabla_s^{\text{im}} \tilde{\varepsilon}_v^c \\ &= \nabla_s(\tilde{\mathbf{N}}^c) \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{N}}^c \nabla_s \mathbf{e} \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_s(\nabla \tilde{\varepsilon}_v^c) &= \nabla_s^{\text{ex}}(\nabla \tilde{\varepsilon}_v^c) + \nabla_s^{\text{im}}(\nabla \tilde{\varepsilon}_v^c) \\ &= \nabla_s(\tilde{\mathbf{B}}^c) \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{B}}^c \nabla_s \mathbf{e} \quad (46) \end{aligned}$$

- 繊維材

$$\nabla_s \varepsilon_{v,L}^f(\varepsilon_L^f) = \nabla_{\varepsilon} \varepsilon_{v,L}^f (\nabla_s^{\text{ex}} \varepsilon_L^f + \nabla_s^{\text{im}} \varepsilon_L^f) \quad \text{with 式 (39), (40), (41)} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f &= \nabla_s^{\text{ex}} \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f + \nabla_s^{\text{im}} \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f \\ &= \nabla_s \left(\tilde{N}^f \right) e + \tilde{N}^f \nabla_s e \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s (\nabla \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f) &= \nabla_s^{\text{ex}} (\nabla \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f) + \nabla_s^{\text{im}} (\nabla \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f) \\ &= \underbrace{\nabla_s \left(T_1^d \right) \tilde{B}^f e + T_1^d \nabla_s \left(\tilde{B}^f \right) e}_{\text{explicit}} + \underbrace{T_1^d \tilde{B}^f \nabla_s e}_{\text{implicit}} \end{aligned} \quad (49)$$

なお, N^c , B^c , \tilde{N}^c , \tilde{B}^c は, 設計変数 \hat{s} に依存しない. よって, 式 (38), (44)-(46) 内のコンクリートに関する陽的に直接求まる微分項はゼロとなる.

次に主たる変数と設計変数 \hat{s} との相互関係については, それぞれ $\sigma = \sigma(D, \varepsilon(\hat{s}))$, $D = D(\kappa)$, $\kappa = \kappa(\tilde{\varepsilon}_v(e(\hat{s})), \kappa_u(e_u(\hat{s})))$, $\sigma_L^i = \sigma_L^i(u_L^i(\hat{s}), u_{L_u}^i(\hat{s}))$ と表わされ, 連鎖律に従ってコンクリート, 繊維材, 界面の応力微分 $\nabla_s \sigma^c$, $\nabla_s \sigma_L^i$, $\nabla_s \sigma_{L_u}^i$ を書くと以下のようなになる.

$$\begin{aligned} \nabla_s \sigma^c &= \frac{\partial \sigma^c}{\partial \varepsilon^c} \frac{\partial \varepsilon^c}{\partial s} + \frac{\partial \sigma^c}{\partial \tilde{\varepsilon}_v^c} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_v^c}{\partial s} + \frac{\partial \sigma^c}{\partial \kappa_u^c} \frac{\partial \kappa_u^c}{\partial s} \\ &= C_{\text{ed}}^c \nabla_s^{\text{im}} \varepsilon^c + \bar{E}^c \nabla_s^{\text{im}} \tilde{\varepsilon}_v^c + \check{E}^c \nabla_s \kappa_u^c \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \sigma_L^f &= \frac{\partial \sigma_L^f}{\partial \varepsilon_L^f} \frac{\partial \varepsilon_L^f}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_L^f}{\partial \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_L^f}{\partial \kappa_u^f} \frac{\partial \kappa_u^f}{\partial s} \\ &= C_{\text{ed},L}^f (\nabla_s^{\text{ex}} \varepsilon_L^f + \nabla_s^{\text{im}} \varepsilon_L^f) \\ &\quad + \bar{E}^f (\nabla_s^{\text{ex}} \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f + \nabla_s^{\text{im}} \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f) + \check{E}^f \nabla_s \kappa_u^f \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s \sigma_{L_u}^i &= \frac{\partial \sigma_{L_u}^i}{\partial u_{L_u}^i} \frac{\partial u_{L_u}^i}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{L_u}^i}{\partial u_L^i} \frac{\partial u_L^i}{\partial s} \\ &= k_{L_u} (\nabla_s^{\text{ex}} u_{L_u}^i + \nabla_s^{\text{im}} u_{L_u}^i) + k_{L_u} \nabla_s u_L^i \end{aligned} \quad (52)$$

ここで, k_L は式 (8) から陽的に求められる界面の接線剛性である. また, κ_u , e_u と $u_{L_u}^i$ 及び k_{L_u} の下添え字 u は, ある有限要素で荷重除荷状態が発生する時間 t_u におけるそれぞれの値を意味する.

なお, 上式では省略記号として '荷重載荷' 状態に関する項を以下のように置き,

$$\bar{E}^c \equiv \frac{\partial \sigma^c}{\partial \tilde{\varepsilon}_v^c} = \frac{\partial \sigma^c}{\partial D^c} \frac{\partial D^c}{\partial \kappa^c} \frac{\partial \kappa^c}{\partial \tilde{\varepsilon}_v^c} \quad (53)$$

$$\bar{E}^f \equiv \frac{\partial \sigma_L^f}{\partial \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f} = \frac{\partial \sigma_L^f}{\partial D^f} \frac{\partial D^f}{\partial \kappa^f} \frac{\partial \kappa^f}{\partial \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f} \quad (54)$$

また, その最終微分項は次の関係がある.

$$\frac{\partial \sigma^c}{\partial \tilde{\varepsilon}_v^c}, \frac{\partial \sigma_L^f}{\partial \tilde{\varepsilon}_{v,L}^f} = \begin{cases} 1 & \text{if loading} \\ 0 & \text{if un-/reloading} \end{cases} \quad (55)$$

一方, 別の省略記号 $\check{E}^{c/f}$ は, '荷重除荷' と '再載荷' に関するもので,

$$\check{E}^{c/f} \equiv \frac{\partial \sigma^{c/f}}{\partial \kappa_u^{c/f}} = \frac{\partial \sigma^{c/f}}{\partial D^{c/f}} \frac{\partial D^{c/f}}{\partial \kappa^{c/f}} \frac{\partial \kappa^{c/f}}{\partial \kappa_u^{c/f}} \quad (56)$$

と置き, その最後の微分項は以下の関係にある.

$$\frac{\partial \kappa^{c/f}}{\partial \kappa_u^{c/f}} = \begin{cases} 0 & \text{if loading} \\ 1 & \text{if un-/reloading} \end{cases} \quad (57)$$

よって, '荷重載荷' 状態にある場合は $\bar{E}^{c/f} \neq 0$, $\check{E}^{c/f} = 0$, 反対に '荷重除荷'・'再載荷' 状態にある時は $\bar{E}^{c/f} = 0$, $\check{E}^{c/f} \neq 0$ である.

最後に式 (50), (51) 内の微分項 $\nabla_s \kappa_u^{c/f}$ と式 (52) の $\nabla_s u_{L_u}^i$ は, それぞれ式 (45), (48) および式 (42) から以下のように求まる.

$$\nabla_s \kappa_u^c = \tilde{N}^c \nabla_s e_u \quad (58)$$

$$\nabla_s \kappa_u^f = \nabla_s \left(\tilde{N}^f \right) e_u + \tilde{N}^f \nabla_s e_u \quad (59)$$

$$\nabla_s u_{L_u}^i = \nabla_s \left(\bar{N} \right) \bar{d}_u + \bar{N} \nabla_s \bar{d}_u \quad (60)$$

ここで, \bar{d}_u は, 時間 t_u における節点の滑り長さベクトルである. なお, e_u と \bar{d}_u は荷重載荷状態が生じる毎に更新される必要がある.

(3) 目的関数の直接求められる微分項

目的関数の微分のうち, 陽的に直接求めることができる微分項は次式のように表される.

$$\nabla_s^{\text{ex}} f = \nabla_s^{\text{ex}} (f^c + f^f + f^i) \quad (61)$$

および,

$$\nabla_s^{\text{ex}} f^c = - \int_{\Omega^c} \int_{\tilde{\varepsilon}^c} \nabla_s^{\text{ex}} (\sigma^c) d\varepsilon^c d\Omega^c \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{\text{ex}} f^f &= - \int_{\Omega^f} \int_{\varepsilon_L^f} (\nabla_s^{\text{ex}} (\sigma_L^f) d\varepsilon_L^f + \sigma_L^f \nabla_s^{\text{ex}} d\varepsilon_L^f) d\Omega^f \\ &\quad - \int_{\Omega_\xi^f} \int_{\varepsilon_L^f} \sigma_L^f d\varepsilon_L^f \nabla_s |J^f| d\Omega_\xi^f \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \nabla_s^{\text{ex}} f^i &= - \int_{\Omega^i} \int_{u_L^i} (\nabla_s^{\text{ex}} (\sigma_L^i) du_L^i + \sigma_L^i \nabla_s^{\text{ex}} du_L^i) d\Omega^i \\ &\quad - \int_{\Omega_\xi^i} \int_{u_L^i} \sigma_L^i du_L^i \nabla_s |J^i| d\Omega_\xi^i \end{aligned} \quad (64)$$

ここで, $\nabla_s^{\text{ex}} \sigma^c$, $\nabla_s^{\text{ex}} \sigma_L^f$, $\nabla_s^{\text{ex}} \sigma_L^i$ は, 式 (50), (51) 及び (52) の応力の直接求められる微分を指す.

なお, 既往の研究¹⁰⁾では, 式 (62) の $\nabla_s^{\text{ex}} f^c$ はゼロとして扱われている. 本研究では, より精度の高い感度を求めることを念頭に式 (50) 右辺の最終項を新たに考慮したため, 式 (62) は必ずしもゼロとはならない.

以上が目的関数の直接求められる微分に関するものであり, 以降では間接的に求まる微分の導出方法を記す.

(4) 変位に関する仮想仕事式の微分

変位に関する離散化された仮想仕事式 (28) を設計変数 \hat{s} で微分し, 式 (50), (51) をそれに代入すると以下のように整理できる.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{\Omega^c} \mathbf{B}^{cT} \mathbf{C}_{ed}^c \mathbf{B}^c d\Omega^c \nabla_s \mathbf{d}}_{\mathbf{K}_{dd}^c} + \underbrace{\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^{fT} \mathbf{C}_{ed}^f \mathbf{B}^f d\Omega^f \nabla_s \mathbf{d}}_{\mathbf{K}_{dd}^f} \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^{fT} (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \mathbf{C}_{ed,L}^f \bar{\mathbf{B}} d\Omega^f \nabla_s \bar{\mathbf{d}}}_{\mathbf{K}_{dd}^f} \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega^c} \mathbf{B}^{cT} \bar{\mathbf{E}}^c \tilde{\mathbf{N}}^c d\Omega^c \nabla_s e}_{\mathbf{K}_{de}^c} \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^{fT} (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \bar{\mathbf{E}}^f \tilde{\mathbf{N}}^f d\Omega^f \nabla_s e}_{\mathbf{K}_{de}^f} \\
 = & \nabla_s \lambda_{t+1} \mathbf{P} - \underbrace{\int_{\Omega^f} \nabla_s (\mathbf{B}^f)^T (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \sigma_L^f d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_1^d} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^{fT} (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \mathbf{C}_{ed,L}^f \nabla_s^\text{ex} \varepsilon_L^f d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_2^d} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^{fT} (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \bar{\mathbf{E}}^f \nabla_s^\text{ex} \varepsilon_{v,L}^f d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_3^d} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^{fT} \nabla_s (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \sigma_L^f d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_4^d} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega_\xi^f} \mathbf{B}^{fT} (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \sigma_L^f \nabla_s |\mathbf{J}^f| d\Omega_\xi^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_5^d} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^{fT} (\mathbf{T}_1^\varepsilon)^T \bar{\mathbf{E}}^f \nabla_s \kappa_u^f d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_6^d} - \underbrace{\int_{\Omega^c} \mathbf{B}^{cT} \bar{\mathbf{E}}^c \nabla_s \kappa_u^c d\Omega^c}_{\tilde{\mathbf{P}}_7^d}
 \end{aligned} \tag{65}$$

ここで, 仮想変位場 $\delta \mathbf{u}$ は任意であるため, $\nabla_s \delta \mathbf{d}$ の項は現れない. なお, 式 (65) は陽的に直接求められる微分項を右辺に, 間接的に求める微分項を左辺に移項し,

整理したものである. その右辺を疑似荷重ベクトルと呼び, また, 左辺の項はそれぞれ式 (33) で紹介した接線剛性マトリックス \mathbf{K}_T の各成分と一致する.

(5) 非局所等価ひずみに関する仮想仕事式の微分

前節と同様に非局所等価ひずみに関する離散化された仮想仕事式 (29) を設計変数 \hat{s} で微分し, 式 (44)-(49) をそれに代入すると以下のように整理できる,

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{\Omega^c} \left[c (\tilde{\mathbf{B}}^c)^T \tilde{\mathbf{B}}^c + (\tilde{\mathbf{N}}^c)^T \tilde{\mathbf{N}}^c \right] d\Omega^c \nabla_s e}_{\mathbf{K}_{ee}^c} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^c} (\tilde{\mathbf{N}}^c)^T \bar{\mathbf{F}}^c \mathbf{B}^c d\Omega^c \nabla_s \mathbf{d}}_{\mathbf{K}_{ed}^c} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^f} (\tilde{\mathbf{N}}^f)^T \bar{\mathbf{F}}^f \mathbf{T}_1^\varepsilon \mathbf{B}^f d\Omega^f \nabla_s \mathbf{d}}_{\mathbf{K}_{ed}^f} \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega^f} \left[c (\tilde{\mathbf{B}}^f)^T \tilde{\mathbf{B}}^f + (\tilde{\mathbf{N}}^f)^T \tilde{\mathbf{N}}^f \right] d\Omega^f \nabla_s e}_{\mathbf{K}_{ee}^f} \\
 = & - \underbrace{\int_{\Omega^f} c \left[\nabla_s (\tilde{\mathbf{B}}^f)^T \tilde{\mathbf{B}}^f + (\tilde{\mathbf{B}}^f)^T \nabla_s (\tilde{\mathbf{B}}^f) \right] e d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_1^e} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^f} \left[\nabla_s (\tilde{\mathbf{N}}^f)^T (\varepsilon_{v,L}^f - \varepsilon_{v,L}^f) \right.}_{\tilde{\mathbf{P}}_2^e} \\
 & \quad \left. + (\tilde{\mathbf{N}}^f)^T (\nabla_s^\text{ex} \varepsilon_{v,L}^f - \bar{\mathbf{F}}^f \nabla_s^\text{ex} \varepsilon_{v,L}^f) \right] d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_3^e} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega_\xi^f} \left[c (\tilde{\mathbf{B}}^f)^T (\mathbf{T}_1^d)^T \nabla_s \varepsilon_{v,L}^f \right.}_{\tilde{\mathbf{P}}_4^e} \\
 & \quad \left. + (\tilde{\mathbf{N}}^f)^T (\varepsilon_{v,L}^f - \varepsilon_{v,L}^f) \right] \nabla_s |\mathbf{J}^f| d\Omega_\xi^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_5^e}
 \end{aligned} \tag{66}$$

なお, 上式では省略記号として以下を用いた.

$$\bar{\mathbf{F}}^c \equiv \frac{\partial \varepsilon_v^c}{\partial \varepsilon^c} = \frac{\partial \varepsilon_v^c}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^c} + \frac{\partial \varepsilon_v^c}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon^c} \tag{67}$$

$$\bar{\mathbf{F}}^f \equiv \frac{\partial \varepsilon_{v,L}^f}{\partial \varepsilon_L^f} \tag{68}$$

式 (18) の仮想の非等価ひずみ $\delta \varepsilon_v$ は任意であり, その節点ベクトルの微分項 $\nabla_s \delta e$ は式 (66) に現れない. また, 便宜上, 式 (66) の右辺の第 2, 3 番目の積分をそれぞれ疑似荷重ベクトル $\tilde{\mathbf{P}}_2^e, \tilde{\mathbf{P}}_3^e$ と置く.

(6) 界面に関する仮想仕事式の微分

前節と同様に界面に関する離散化された仮想仕事式 (30) を設計変数 \hat{s} で微分し, 式 (51), (52) をそれに代入すると以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left[\int_{\Omega^f} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_{\text{ed,L}}^f \bar{\mathbf{B}} d\Omega^f + \int_{\Omega^i} \bar{\mathbf{N}}^T k_L \bar{\mathbf{N}} d\Omega^i \right]}_{\mathbf{K}_{\text{dd}}^i} \nabla_s \bar{\mathbf{d}} \\
 & + \underbrace{\int_{\Omega^f} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_{\text{ed,L}}^f \mathbf{T}_1^\varepsilon \mathbf{B}^f d\Omega^f}_{\mathbf{K}_{\text{dd}}^f} \nabla_s \mathbf{d} = - \underbrace{\int_{\Omega^f} \nabla_s (\bar{\mathbf{B}})^T \sigma_L^f d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_1^{\bar{\mathbf{d}}}} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^f} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_{\text{ed,L}}^f \nabla_s^{\text{ex}} \varepsilon_L^f d\Omega^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_2^{\bar{\mathbf{d}}}} - \underbrace{\int_{\Omega_\xi^f} \bar{\mathbf{B}}^T \sigma_L^f \nabla_s |J^f| d\Omega_\xi^f}_{\tilde{\mathbf{P}}_3^{\bar{\mathbf{d}}}} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega^i} \nabla_s (\bar{\mathbf{N}})^T \sigma_L^i d\Omega^i}_{\tilde{\mathbf{P}}_4^{\bar{\mathbf{d}}}} - \underbrace{\int_{\Omega^i} \bar{\mathbf{N}}^T k_L \nabla_s^{\text{ex}} u_L^i d\Omega^i}_{\tilde{\mathbf{P}}_5^{\bar{\mathbf{d}}}} \\
 & - \underbrace{\int_{\Omega_\xi^i} \bar{\mathbf{N}}^T \sigma_L^i \nabla_s |J^i| d\Omega_\xi^i}_{\tilde{\mathbf{P}}_6^{\bar{\mathbf{d}}}} - \underbrace{\int_{\Omega^i} \bar{\mathbf{N}}^T k_{L_u} \nabla_s u_{L_u}^i d\Omega^i}_{\tilde{\mathbf{P}}_7^{\bar{\mathbf{d}}}}
 \end{aligned} \quad (69)$$

ここで, 式 (21) の δu_L^i は任意であるため, $\nabla_s \delta \bar{\mathbf{d}}$ は上式に現れない. 本式の導出方法については, 既往の文献¹⁰⁾で詳細に示されているのでそれを参考にされたい.

(7) 系全体の感度

式 (65), (66), (69) を集め, 整理すると以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{dd}}^{\text{c+f}} & \mathbf{K}_{\text{de}}^{\text{c+f}} & \mathbf{K}_{\text{dd}}^f \\ \mathbf{K}_{\text{ed}}^{\text{c+f}} & \mathbf{K}_{\text{ee}}^{\text{c+f}} & 0 \\ \mathbf{K}_{\text{dd}}^f & 0 & \mathbf{K}_{\text{dd}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_s \mathbf{d} \\ \nabla_s \mathbf{e} \\ \nabla_s \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \\
 & = \nabla_s \lambda_{t+1} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^7 \tilde{\mathbf{P}}_l^{\bar{\mathbf{d}}} \\ \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{P}}_l^{\mathbf{e}} \\ \sum_{l=1}^7 \tilde{\mathbf{P}}_l^{\bar{\mathbf{d}}} \end{bmatrix} \quad (70)
 \end{aligned}$$

式 (70) は, 右辺を疑似的な荷重ベクトル \mathbf{P}_{pse} と見なせば, 以下の典型的な剛性方程式の形式になる.

$$\mathbf{K}_T \nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_{\text{pse}} = \nabla_s \lambda_{t+1} \hat{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}_{\text{pse}} \quad (71)$$

ここで \mathbf{K}_T は, 前述の時間 $t+1$ における接線剛性マトリックスである.

次に, 荷重係数の設計変数による微分 $\nabla_s \lambda$ を求める方法を考える. 本研究では, 変位制御法における節点

変位ベクトルの制御される‘成分’ (仮に j 番目とする) u_j を \hat{u}_j と置き, その微分 $\nabla_s \hat{u}_j$ が 0 となることを利用する. これは, その節点変位ベクトル成分が設計変数 \hat{s} に無関係に決定されることを応用したものである. すなわち, 式に表すと以下ようになる.

$$\nabla_s \hat{u}_j = \nabla_s \lambda_{t+1} \frac{\hat{u}_j}{\lambda_{t+1}} + (\nabla_s \hat{u}_j)_{\text{pse}} = 0 \quad (72)$$

ここで, \hat{u}_j と $(\nabla_s \hat{u}_j)_{\text{pse}}$ は以下で得られるベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ および $(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{\text{pse}}$ の j 番目の成分を意味する.

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_T^{-1} \lambda_{t+1} \hat{\mathbf{P}} \quad (73)$$

$$(\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{\text{pse}} = \mathbf{K}_T^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\text{pse}} \quad (74)$$

この \hat{u}_j と $(\nabla_s \hat{u}_j)_{\text{pse}}$ を式 (72) に代入すると以下が得られる.

$$\nabla_s \lambda_{t+1} = - \frac{(\nabla_s \hat{u}_j)_{\text{pse}}}{\hat{u}_j} \lambda_{t+1} \quad (75)$$

以上より, 全体の節点変位ベクトルの微分 $\nabla_s \hat{\mathbf{u}}$ が次のように表される.

$$\nabla_s \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \frac{\nabla_s \lambda_{t+1}}{\lambda_{t+1}} + (\nabla_s \hat{\mathbf{u}})_{\text{pse}} \quad (76)$$

最後に, 目的関数 f の設計変数による微分は, 式 (76) を式 (37) に代入して得られる, 各荷重ステップにおける感度を荷重総ステップ数 n_{step} 回足し合わせることで求められる.

$$\nabla f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{u}) = \sum_{t=1}^{n_{\text{step}}} (\nabla_s^{\text{ex}} f_t + \nabla_u f_t^T \nabla_s \hat{\mathbf{u}}_t) \quad (77)$$

ここで, f_t は, 荷重ステップ t 内で得られたエネルギー吸収能力を意味する.

一方, 等式制約条件式 (35) については, 変位 \mathbf{u} に依存しないため, その設計変数 \hat{s} に関する微分は

$$\nabla_s h = \frac{dh(\hat{\mathbf{s}})}{d\hat{\mathbf{s}}} \quad (78)$$

となる. これは陽的に直接求まる微分であり, 制約関数の感度は次式により求められる.

$$\nabla_s h = \bigcup_{m=1}^{n_{\text{ele}}^f} \int_{\Omega_\xi^f} (\nabla_s |J^f|) d\Omega_\xi^f \quad (79)$$

以上のようにして求められる目的関数の微分 $\nabla f(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{d})$ と等式制約関数の微分 $\nabla_s h(\hat{\mathbf{s}})$ とをともに最適化アルゴリズムに代入し, 反復収束計算を行いながら最適解に近づけることができる.

7. 数値解析例

(1) FRC 梁の構造最適化問題

本節は, 図-5 に示される FRC 単純梁について最適化を行う. 繊維材は, ガラス繊維と炭素繊維の 2 ケースを考慮する. 一般に両繊維ともに引張りに対し脆性的な破壊挙動を示すが, ガラス繊維についてはエポキシ樹脂を充填することで靱性が著しく改善されること

	concrete	AR-glass	carbon
Young's modulus E (GPa):	39	72	240
Poisson's ratio:	0.2	0.2	0.2
initial equivalent strain κ_0 :	0.0002	0.007	0.003
sensitivity factor k :	10.0	—	—
softening parameters α :	0.96	0.9	0.94
β :	10.0	3.0	10.0

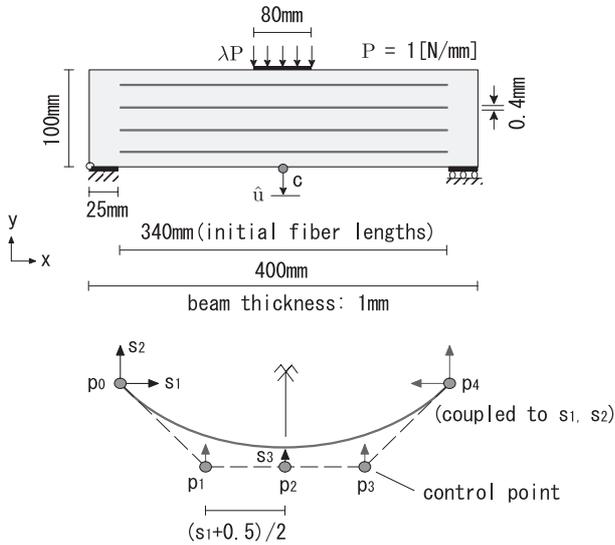


図-5 FRC単純梁の材料定数, 構造寸法及びベジエ曲線で近似された繊維材

が報告されている^{11),12),13)}. これを勘案し, ここでは炭素繊維は高強度低靱性, ガラス繊維は中強度中靱性であると想定している. 各々の材料定数については同図に記す. また, コンクリートと繊維材との界面における材料定数は, 文献^{11),12),13)}に従った. 解析は対称性を考慮して構造の半分のみで行い, 平面応力状態を仮定している. 前述のとおり, コンクリートは8節点四辺形要素, 界面は3節点の1D要素で離散化し, 要素数はそれぞれ200及び68個である.

繊維材の形状は, 図-5に示す4次の対称ベジエ曲線で近似している. 構造の対称性から, 制御点 p_3, p_4 は p_1, p_0 と対の関係にある. また, 制御点 p_1 の y 座標を p_2 のそれと同じ値に設定し, 更に p_1 の x 座標は常に p_0 と p_2 の中間点のそれと等しくなるように拘束した. これにより, 繊維材1本の形状は3つの設計変数 s_1, s_2, s_3 で定義され, 設計変数の総数は12 (3×4 本)となった. また, 設計変数の初期値として, (i) すべての繊維材において $s_1 = 0.075$, (ii) s_2 と s_3 は下段の繊維材から順に0.15, 0.38, 0.62および0.85に設定した. コンクリートによる厚いかぶりは不要であるため, s_2 と s_3 の下限値は $s_L = 0.01$ 及び上限値 $s_U = 0.99$ とした. また, 設計変数 s_1 の下限及び上限値は, それぞれ $s_L = 0.01$ と $s_U = 0.4$ とした. 繊維材の厚さについて

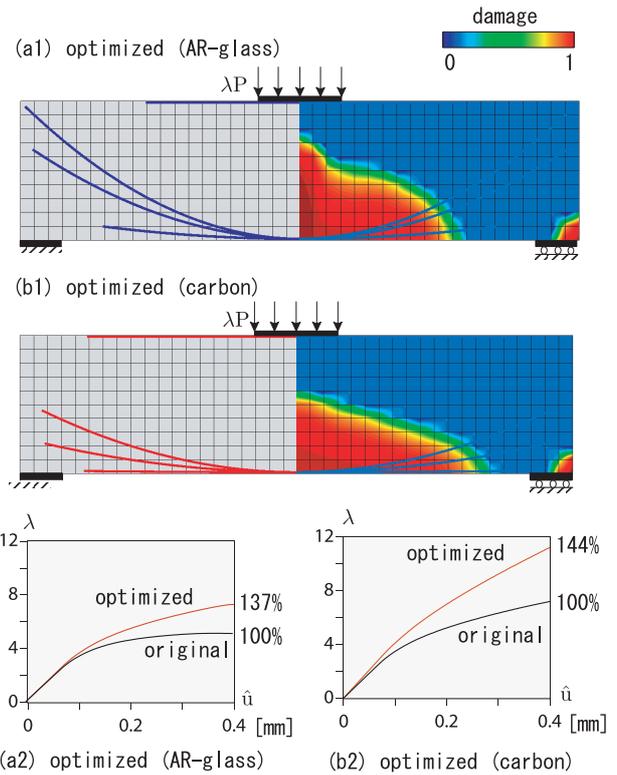


図-6 FRC梁の最適化結果: (a1, a2) ガラス繊維, (b1, b2) 炭素繊維

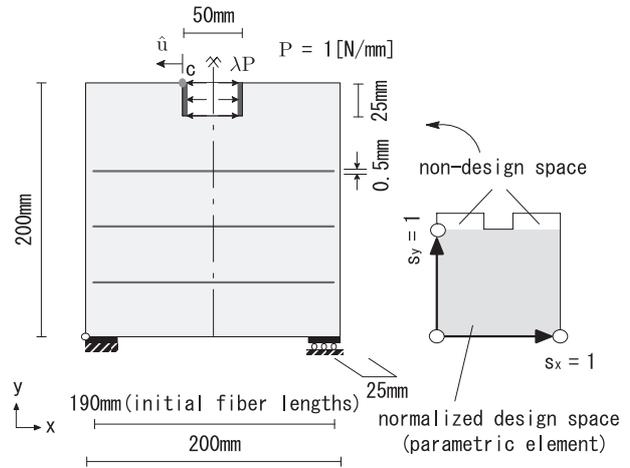


図-7 FRCプレートの構造(左)とパラメトリック要素(右)

は0.4mmと設定したため, 繊維材の体積は構造全体の1.4%となった. この値は最適化途中でも一定である. 変位制御点 c を梁の中央底面にセットし, 制御点での最終節点変位 \hat{u} は, $-y$ 方向に0.4mmとした.

図-6は, 最適化の結果を示しており, 同図(a1), (b1)の梁右半分は損傷変数 D の分布を表わしている. これより, 梁下端中央部を中心にコンクリートの損傷が進行している様子が分かる. 最適化後, 下側3本の繊維材がコンクリートの損傷を軽減するように梁下端に, 上側1本の繊維材も梁上端に移動した. ガラス繊維は, 炭素

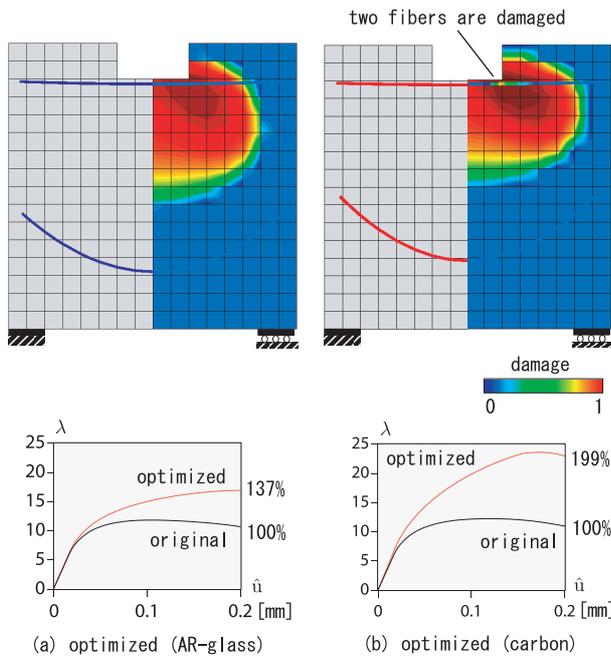


図-8 FRC プレートの最適化結果：(a) ガラス繊維，(b) 炭素繊維

繊維に比べ剛性が低いため、より曲げ上げるような形状で梁の曲げ変形に抵抗している様子がわかる。なお、どちらもこの変位レベルにおいてはコンクリートは損傷しているが繊維材自体はまだ損傷を受けていない。

同図 (a2) および (b2) は、それぞれ縦軸に荷重係数 λ を、横軸に変位制御点の変位成分 \hat{u} を取った最適化前後の荷重-変位曲線を表しており、最適化後には耐荷力が安定的に向上している様子がわかる。また、同図右の数字は最適化前の目的関数値を 100% とした場合の最適化後の目的関数値である。本論文では誌面のスペースの関係より、目的関数値の推移図を省略するが目的関数値（絶対値とする）は最初の最適化計算 30 回程度までは急速に増加し、その後緩やかに増加を続けながら一定値に収束した。結果として、どちらも 40% 程度のエネルギー吸収性能が増加した。これより、本手法は力学的に理にかなう構造を与えるものと言える。

一方で、すべての繊維材が梁下端に移動し、コンクリートの損傷を軽減する、より合理的な構造が得られることを期待していたものの、それには至らなかった。この原因は、いわゆる非凸最適化問題 (non-convex optimization) が抱える典型的な局所最適解の問題にある。すなわち、得られた結果は初期の繊維材配置に強く依存するもので、上側の繊維材に関して言えば、それが梁上端に移動することで断面剛性を高める局所的な最適解になっていることがわかる。

(2) 切欠きをもつ FRC プレートの構造最適化

次の計算例は、図-7 に示す FRC プレートの最適化である。材料定数、荷重载荷、要素形式、繊維材の幾何に関する定義については、前節と同じである。コンクリートには 124 個、界面には 24 個の要素を用いた。本構造は切欠きを有するため、パラメトリック要素の設定に制限が加わる。結果として繊維材を配置できる設計領域は、切欠き部以下の領域とした。

設計変数の初期値は (i) $s_1 = 0.025$, (ii) s_2 と s_3 は、3 本の繊維材で 0.25, 0.50 及び 0.75 とした。繊維材の体積は、構造全体の 0.74% である。変位制御点 c での最終変位量は、 $-x$ 方向に 0.2mm とした。

図-8 は、材料非線形域における最適化結果である。プレート右側の損傷状態が示すように、ガラス及び炭素繊維の両ケースともにプレート上端コーナ部のコンクリートの損傷が著しい。そのため、それを軽減するように 3 本の繊維材すべてが上端に移動する配置が期待されたものの、上側 2 本の繊維材のみが上端に移動し、残りの 1 本が下側に停留する繊維材配置となった。これは、前節の上側の繊維材と同様に明らかな局所的最適解である。下側の繊維材は初期配置に依存して圧縮領域に留まり、その応力状態に沿って緩やかに曲がる圧縮材として機能している。本計算例でも、目的関数値の推移は省略するが目的関数値は最初の最適化計算 20 回程度までは急速に増加し、その後緩やかに増加を続けながら一定値に収束した。その結果、ガラス繊維では約 40%、炭素繊維で場合では約 100% のエネルギー吸収性能が増加した。前節と同様に高強度である炭素繊維の方が、よりエネルギー吸収性能を増加させる結果となった。

一方、炭素繊維は上側 2 本において若干の損傷が生じており、ガラス繊維の方はまだ損傷を受けていない。そのため、同図の荷重-変位曲線を比べると炭素繊維の場合は、荷重ピーク点以降に軟化する様子が見られるが、ガラス繊維の場合は正の接線剛性を保つ安定した状態である。現時点では炭素繊維の方が力学的な効果は高いが、求められる制御変位が大きくなるにつれ、靱性に優れるガラス繊維が優位となる。本手法はこれらの経路依存型の構造問題を考慮でき、有効に利用されない繊維材が一部に残るといった問題点があるものの、エネルギー吸収性能を確実に向上させることが検証された。

8. 結論

本研究では、FRC 構造のエネルギー吸収性能の向上を目的として、繊維材の形状最適化手法を提案した。提案した手法を数値解析例を用いて確認し、本手法の妥当性を検証した。本研究の成果を以下に記す。

- 提案した手法により, 概ね力学上合理的と考えられる構造が得られた. これより, 本手法の妥当性が検証されたと言える.
- 従来型の手法では, 隣接する要素間で繊維が不連続となるが, 本手法では埋込み要素を応用したことで, 力学的に現実性の高い繊維複合材の構造挙動を表現できるようになった.
- 本手法では, 繊維材の配置は固定されたメッシュに依存しないため, 設計自由度の高い手法であると言える. また, 曲線形状の繊維材も取り扱うことが可能であるため, 局面形状をもつ3次元構造への拡張が期待される.
- 本手法は, FRC という特殊な繊維複合材料に応用したが他の複合材料にも適用可能である.

一方, 今後の課題として以下が挙げられる.

- 一般に非凸最適化問題では, 明らかな局所最適解に陥ることがある. 本研究の計算例でも一部でその影響が見られた. 勿論, 本研究のような複雑な最適化問題では, そもそも大域的最適値を得ることは不可能であり, また, 得られた結果が大域的最適解であることを証明する方法もない. よって, 今後は明白な局所最適解に陥らないような, より自由度の高い最適化手法の開発が期待される.
- 準解析法 (semi-analytical method) による感度解析では, 構造の剛体回転が大きくなるにつれ, 感度の精度が低下することが多くの研究で報告されている^{3),4),6),15),16),17)}. 板厚の薄い構造や厳しい損傷を受ける曲げ部材等では, 剛体回転が大きくなる傾向があり, 感度解析の精度低下を回避できるような手法の開発が期待される.

付録： 変換マトリックス

2次元の回転マトリックス \mathbf{T}^d を以下に示す.

$$\mathbf{T}^d = \begin{bmatrix} \cos(x_G, x_L) & \cos(y_G, x_L) \\ \cos(x_G, y_L) & \cos(y_G, y_L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

また, ひずみ変換マトリックス \mathbf{T}^e は, 全体座標系で定義された, 平面応力状態のひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_G$ を局部座標系 $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ に変換する. すなわち, $\boldsymbol{\varepsilon}_L = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}]^T = \mathbf{T}^e \boldsymbol{\varepsilon}_G$ で, \mathbf{T}^e は以下となる.

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & l_2 m_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

謝辞: 本研究は, “Deutsche Forschungsgemeinschaft” DFG (German Research Foundation) の研究プロジェ

クト Ra 218/19 および Ra 218/21 の助成を受けて行われたものである. この研究助成に心より感謝申し上げる.

参考文献

- 1) Balakrishnan, S., Murray, D.W.: Finite element prediction of reinforced concrete behavior, *Structural Engineering Report*, No. 138, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 1986.
- 2) Barzegar, F., Maddipudi, S.: Generating reinforcement in FE modeling of concrete structures, *J. Struct. Eng.*, Vol. 120, No. 5, pp. 1656-1662, 1994.
- 3) Bletzinger, K.-U., Firl, M., Daoud, F.: Approximation of derivatives in semi-analytical structural optimization, *Comput. & Struct.*, Vol. 86, pp. 1404-1416, 2008.
- 4) de Boer, H., van Keulen, F.: Refined semi-analytical design sensitivities, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 37, pp. 6961-6980, 2000.
- 5) Chang, T.Y., Taniguchi, H., Chen, W.F.: Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete panels, *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 113, No. 1, pp. 122-140, 1987.
- 6) Cheng, G., Olhoff, N.: Rigid body motion test against error in semi-analytical sensitivity analysis, *Comput. & Struct.*, Vol. 46, No. 3, pp. 515-527, 1993.
- 7) Elwi, A.E., Hruday, T.M.: Finite element model for curved embedded reinforcement, *J. Eng. Mech.*, Vol. 115, No. 4, pp. 740-754, 1989.
- 8) Hofstetter, G., Mang, H.A.: Work-equivalent node forces from prestress of concrete shells, In: *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, Formulations and Algorithms*, Vol. 2 (eds. Hughes, T.J.R., Hinton, E.), Swansea, Pineridge Press, pp. 312-347, 1986.
- 9) Kato, J., Lipka, A., Ramm, E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 39, pp. 63-81, 2009.
- 10) Kato, J., Ramm, E.: Optimization of fiber geometry for fiber reinforced composites considering damage, *Finite. Elem. Anal. Des.*, Vol. 46, pp. 401-415, 2010.
- 11) Krüger, M., Ozbolt, J., Reinhardt, H.W.: A discrete bond model for 3D analysis of textile reinforced and prestressed concrete elements, *Otto-Graf-Journal*, Vol. 13, pp. 111-128, 2002.
- 12) Krüger, M., Ozbolt, J., Reinhardt, H.W.: A new 3D discrete bond model to study the influence of bond on the structural performance of thin reinforced and prestressed concrete plates, In: *Proceedings of High Performance Fiber Reinforced Cement Composites (HPFRCC4)* (eds. Reinhardt, H.W. et al.), RILEM, Ann Arbor, USA, pp. 49-63, 2003.
- 13) Krüger, M., Xu, S., Reinhardt, H.W., Ozbolt, J.: Experimental and numerical studies on bond properties between high performance fine grain concrete and carbon textile using pull out tests, In: *Beiträge aus der Befestigungstechnik und dem Stahlbetonbau*, Festschrift Professor R. Eligehausen, Universität Stuttgart, pp. 151-164, 2002.
- 14) Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G.: Continuum damage theory -application to concrete. *J. Eng. Mech.*, Vol. 115, pp. 345-365, 1998.
- 15) Mlejnek, H.P.: Accuracy of semi-analytical sensitiv-

- ities and its improvement by the natural method, *Struct. Optim.*, Vol. 4, pp. 128-131, 1992.
- 16) Olhoff, N., Rasmussen, J.: Study of inaccuracy in semi-analytical sensitivity analysis-a model problem, *Struct. Optim.*, Vol. 3, pp. 203-213, 1991.
 - 17) Olhoff, N., Rasmussen, J., Lund, E.: A method of exact numerical differentiation for error elimination in finite-element-based semi-analytical shape sensitivity analysis, *Mech. Struct.& Mach.*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-66, 1993.
 - 18) Patnaik, S.N., Guptill, J.D., Berke, L.: Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 3087-3120, 1995.
 - 19) Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., de Vree, J.H.: Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 3391-3403, 1996.
 - 20) Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., Geers, M.G.D.: Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture, *Mech. Cohes-Frict. Mater.*, Vol. 3, pp. 323-342, 1998.
 - 21) Peerlings, R.H.J.: *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*, Ph.D. dissertation, Faculty of Mechanical Engineering, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1999.
 - 22) Phillips, D.V., Zienkiewicz, O.C.: Finite element non-linear analysis of concrete structures, In: *Proc. Inst. Civ. Engrs.*, Part 2, Vol. 61, No. 3, pp. 59-88, 1976.
 - 23) Stegmann, J., Lund, E.: Discrete material optimization of general composite shell structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 62, pp. 2009-2027, 2005.
 - 24) Stolpe, M., Stegmann, J.: A Newton method for solving continuous multiple material minimum compliance problems, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 35, pp. 93-106, 2008.
 - 25) de Vree, J.H.P., Brekelmans, W.A.M., Gils, M.A.J.: Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics, *Comp. & Struct.*, Vol. 55, pp. 581-588, 1995.
- (2010. 11. 26 受付)

MATERIAL SHAPE OPTIMIZATION FOR FIBER REINFORCED COMPOSITES APPLYING A DAMAGE FORMULATION

Junji KATO, Ekkehard RAMM, Kenjiro TERADA and Takashi KYOYA

The present contribution deals with an optimization strategy of fiber reinforced composites. Although the methodical concept is very general we concentrate on Fiber Reinforced Concrete with a complex failure mechanism resulting from material brittleness of both constituents matrix and fibers.

The purpose of the present paper is to improve the structural ductility of the fiber reinforced composites applying an optimization method with respect to the geometrical layout of continuous long textile fibers. The method proposed is achieved by applying a so-called embedded reinforcement formulation. This methodology is extended to a damage formulation in order to represent a realistic structural behavior.

For the optimization problem a gradient-based optimization scheme is assumed. An optimality criteria method is applied because of its numerically high efficiency and robustness. The performance of the method is demonstrated by a series of numerical examples; it is verified that the ductility can be substantially improved.