Transactions of JSCES, Paper No.20130010

破壊シミュレーションのための構造要素を用いた離散体解析法

Discrete analysis method for fracture simulation using structural elements

車谷 麻緒[1]・寺田 賢二郎[2]・京谷 孝史[3]・加藤 準治[4]・樫山 和男[5]

Mao KURUMATANI, Kenjiro TERADA, Takashi KYOYA, Junji KATO and Kazuo Kashiyama

[1] 茨城大学 工学部 都市システム工学科（〒 316–8511 茨城県日立市中成沢町 4–12–1）
[2] 東北大学 災害科学国際研究所（〒 980–8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6–6–06）
[3] 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻（〒 980–8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6–6–06）
[4] 東北大学 災害科学国際研究所（〒 980–8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6–6–06）
[5] 中央大学 理工学部 都市環境学科（〒 112–8551 東京都文京区春日 1–13–27）

This paper proposes a new discrete analysis method for fracture simulation using structural elements based on the discrete element concept. The suggested structural elements are suitable for fracture simulations because the element stiffness is evaluated by means of relative displacements at the interface between discrete elements (particles). We first formulate the structural elements in consideration of the position and the angle of interface between discrete elements and discuss the integration of element stiffness. The fundamental properties for elastic problem are examined in chapter 3. The eigen-values and eigen-vectors of stiffness matrix are analyzed to investigate the relationship between basic deformation mode and integration order. Also the accuracy of the structural element for beam bending problem is assessed. Finally, after explaining the modeling of fracture in this paper, two representative numerical examples are presented to demonstrate the applicability to fracture simulations for structures involving multiple cohesive cracks.

Key Words : *structural element, fracture simulation, cohesive crack, particle, discrete element concept*

1. はじめに

コンクリートや岩盤・地盤などの材料は，クラックなどの不連続面の形成により，連続体的な変形から不連続な変形に遷移する特徴をもつ．不連続面の形成・進展は，材料の強度や靭性に影響するだけでなく，材料内部の水分移動を進行させることから，不連続面の形成後の挙動追跡は重要な課題となっている．

不連続面の形成する前の連続的な挙動については，有限要素法（FEM）による解析が可能であるが，不連続面形成後の不連続変形を含む解析については，これまで様々な方法が研究されている (1)．不連続面形成前の有限要素解析を拡張するかたちで，分布ひび割れモデル (2) などの構成関係による方法や，不連続性を直接導入するジョイント要素 (3) による方法などが古くから研究されている．近年では，FEM における形状関数に非適合モードとして不連続性を導入した埋め込み型有限要素 (4) と呼ばれる方法や，形状関数における解の再現性を不連続変形に応用した拡張有限要素法 (5) などが開発されている．また，イメージベースモデリングによる要素の細かさを応用し，剛性の低減・消失によりクラックを表現する方法 (6) や，変位場を粒子離散的に扱って不連続変形を表現する方法 (7) も，FEM による連続体解析を拡張した方法のひとつとして挙げられる．

一方，FEM による連続体解析をベースに考えるのではなく，不連続面形成後のモデル化に主眼をおいた解析法も研究が行われている．材料を粒子（離散要素）の集合と考え，バネとダッシュポットにより変形・破壊挙動を表現する個別要素法 (8, 9) や，離散要素内の弾性変形とペナルティによるバネで変形・破壊挙動を表現する不連続変形法 (10) などの研究がベースとなっており，モデル化の明瞭性と簡便性から，これらの方法を応用した研究は近年でも幅広く行われている (11, 12)．また，材料を剛体とバネによるネットワークとしてモデル化し，不連続面の形成を離散的に表現可能な剛体ばねモデル (13) も，材料を離散要素の集合と考える方法のひとつであり，コンクリートや地盤などの不連続体解析に対する有効性が示されている．また近年では，不連続変形法と FEM を組み合わせた方法 (14, 15) や，ハイブリッド型変分原理に基づいて，剛体ばねモデルを拡張した解析法 (16) などが研究されており，不連続面の形成後の不連続体解析だけでなく形成前の連続体解析も可能な方法となっている．

材料を離散要素の集合と考えるもうひとつの方法として，ラチス解析法 (17, 18) がある．ラチス解析法は，材料を離散的に捉え，トラスやフレームなどの構造要素により，離散要素間の結合をモデル化する方法である．破壊のモデル化に関しては，構造要素の剛性を消失させたり，非線形な構成関係を構造要素に導入することで容易に応用が可能である．構造要

* 原稿受付 2012 年 12 月 27 日, 改訂年月日 2013 年 04 月 01 日, 発行年月日 2013 年 04 月 19 日.

Manuscript received, December 27, 2012; final revision, April 01, 2013; published, April 19, 2013.

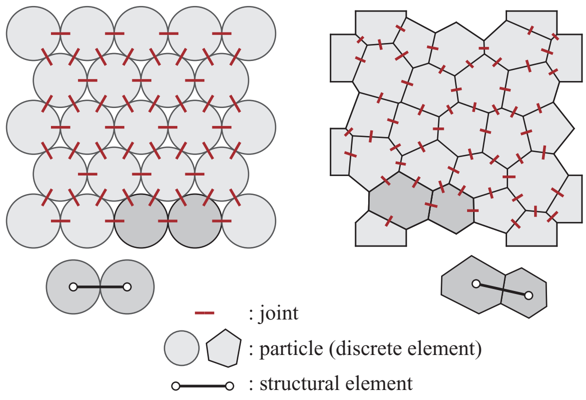
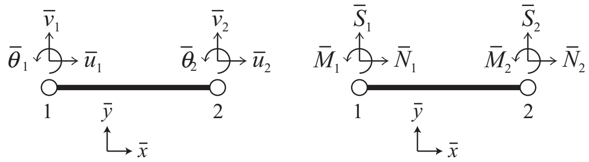
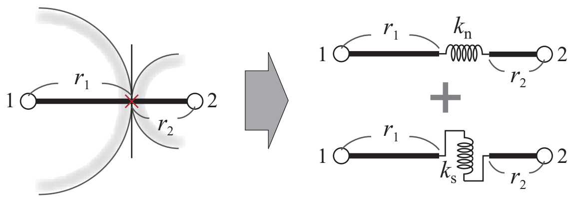


Fig. 1 Discrete element modeling and structural element



(a) Definition of degree of freedom



(b) Normal and shear springs at joint-position

Fig. 2 Definition of DOF and element stiffness

素（1 次元要素）によるマトリックス構造解析の枠組みで，容易に破壊のモデル化とシミュレーションが可能であることから，ラチス解析法を応用した研究は近年でも幅広く行われている [19, 20]．

本論文では，FEM による連続体解析をベースとしない後者の考え方に着目し，材料を粒子（離散要素）の集合と捉える個別要素法の概念を，離散要素間の結合を構造要素でモデル化するラチス解析法に取り入れた，簡便な破壊シミュレーション法を提案する．第 2 節では，粒子同士の結合位置と結合面（破壊面）の角度を考慮して粒子間の相対変位の関係式を導出し，破壊シミュレーションに適した構造要素の定式化を示す．第 3 節では，弾性解析により，本解析手法における基本的な変形特性について検証する．まず，剛性マトリックスの固有値解析により，粒子配置に伴う基本変形モードと積分次数との関係について検討する．次に，1 軸引張問題を対象に，1 軸応力を再現するための境界粒子の取り扱い方法を説明した後，はりの曲げに対する解析精度と収束性について検証する．第 4 節では，本論文における破壊のモデル化について述べた後，本解析手法に対する数値解析例として，複数のクラックが生じる問題を対象に，破壊シミュレーションへの適用例を示す．第 5 節では，本研究の総括を行い，今後の課題について述べる．

2. 粒子間の結合を表す構造要素の定式化

本研究では，材料を粒子（離散要素）の集合と考え，粒子同士の結合を構造要素でモデル化し，構造要素の剛性を消失させることにより破壊を表現する方法を採用する．以下では，材料の離散要素モデリングの考え方を示した後，粒子同士の結合位置と結合面（破壊面）の角度を考慮した構造要素の定式化を示し，本解析手法と既往の類似手法との関係性について述べる．ただし，変位・変形ともに微小であるものとする．

2.1　材料の離散要素モデリング　**Fig. 1** に示すように，材料を粒子（離散要素）の集合として考えると，材料の変形抵抗は粒子同士のジョイント部における結合によって表すことができ，材料の破壊はジョイント部における結合が切れることによってモデル化することができる．さらに，**Fig. 1** に示すように，粒子同士の繋がりを構造要素でモデル化すれば，材料の変形・破壊挙動を簡易的に表現することができる．そして，ジョイント部での相対変位を用いて，粒子間の剛性を評価可能な構造要素に拡張することで，材料の破壊シミュレーションに適した解析法を構築することができる．

2.2　自由度と剛性の定義　本論文では，微小変位問題を対象とする．構造要素の定式化に際し，奥行を 1 とする 2 次元問題を仮定し，部材軸に沿った局所座標系（部材座標系）を $(\bar{x}, \bar{y})$ とする．節点自由度は，軸方向変位と軸直角方向変位および回転角とし，これらに対応する材端力は，軸力とせん断力および曲げモーメントである．**Fig. 2** (a) に示す方向を正の向きとする．ここまでは，一般的なビーム要素と同様の定義である．

要素の剛性は，一般的なビーム要素とは異なり，粒子間の結合剛性を用いて近似する．具体的には，**Fig. 2** (b) に示すように，ジョイント部において法線方向の伸縮バネと接線方向のせん断バネを定義し，それぞれの方向の相対変位に関する要素剛性を定義する．

2.3　各座標系における相対変位と B マトリックス　本研究では，**Fig. 3** (a) に示すように，大きさや形状が不均一な粒子の集合を対象とし，粒子界面上における評価点 g での相対変位ベクトルを導出する．

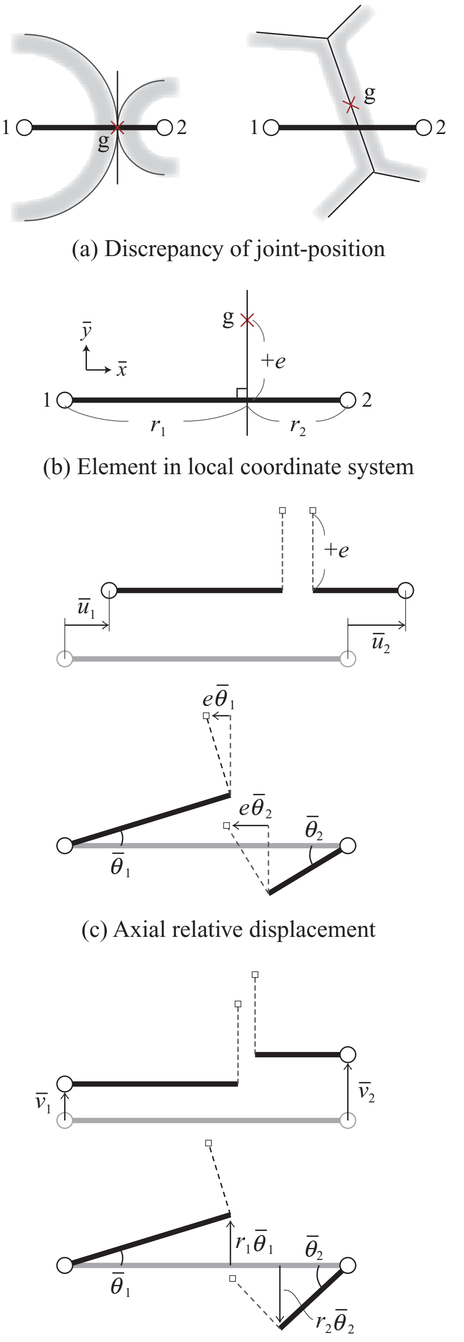
はじめに，**Fig. 3** (b) のように，粒子界面が部材軸と直角である場合の評価点 g における相対変位ベクトルを導出する．局所座標系における点 g での部材軸方向の相対変位を $\bar{u}_g$ とすると，**Fig. 3** (c) を参照して，次式のように表される．

$$\bar{u}_g = \left(\bar{u}_2 - e\bar{\theta}_2\right) - \left(\bar{u}_1 - e\bar{\theta}_1\right) \tag{1}$$

同様に，点 g での部材軸直角方向の相対変位 $\bar{v}_g$ は，**Fig. 3** (d) より，次式で表される．

$$\bar{v}_g = \left(\bar{v}_2 - r_2\bar{\theta}_2\right) - \left(\bar{v}_1 + r_1\bar{\theta}_1\right) \tag{2}$$

式 (1), (2) をマトリックス表記することにより，点 g の相対



(a) Discrepancy of joint-position

(b) Element in local coordinate system

(c) Axial relative displacement

(d) Shear relative displacement

Fig. 3 Relative displacement in local coordinate

変位ベクトル $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}}$ は次のように与えられる．

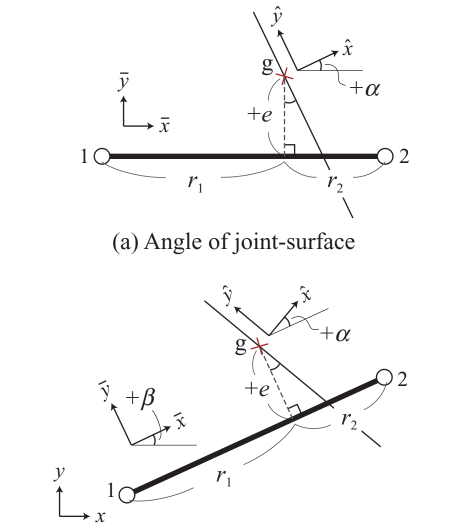
$$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}} = \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g}} \bar{\boldsymbol{u}} \tag{3}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}}, \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g}}, \bar{\boldsymbol{u}}$ の成分は，次のように定義した．

$$\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}} = \left\{ \begin{array}{cc} \bar{u}_{\mathrm{g}} & \bar{v}_{\mathrm{g}} \end{array} \right\}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & e & 1 & 0 & -e \\ 0 & -1 & -r_1 & 0 & 1 & -r_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 & \bar{\theta}_1 & \bar{u}_2 & \bar{v}_2 & \bar{\theta}_2 \end{array} \right\}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$



(a) Angle of joint-surface

(b) Angle between local and global coordinates

Fig. 4 Definition of angle α and β

任意サイズ・任意形状の粒子を表現するには，**Fig. 4** (a) のように，粒子間接線（界面）と部材軸が直交しない場合を考える必要がある．部材軸に対する粒子間接線の傾きを角度 α で定義し，傾いた界面での局所座標系を $(\hat{x}, \hat{y})$ とする．**Fig. 4** (a) において，傾いた粒子界面上の点 g での法線方向と接線方向の相対変位を $\hat{u}_{\mathrm{g}}, \hat{v}_{\mathrm{g}}$ とすると，これらを成分に持つ相対変位ベクトル $\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}}$ は，座標変換行列 $\boldsymbol{T}_{\alpha}$ を用いて，次のように表される．

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_{\mathrm{g}} \\ \hat{v}_{\mathrm{g}} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_{\mathrm{g}} \\ \bar{v}_{\mathrm{g}} \end{array} \right\} = \boldsymbol{T}_{\alpha} \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}} \tag{7}$$

式 (3) より，上式は次のように表される．

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{T}_{\alpha} \bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{T}_{\alpha} \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g}} \bar{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g}}^{\alpha} \bar{\boldsymbol{u}} \tag{8}$$

上式において，$\hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g}}^{\alpha}$ の成分は次のようになる．

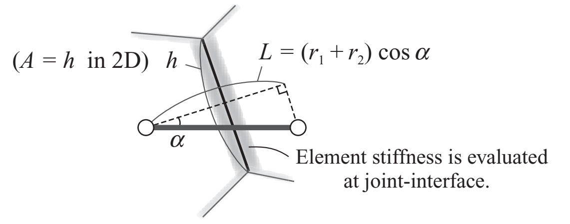
$$\hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g}}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -\mathrm{c}_{\alpha} & -\mathrm{s}_{\alpha} & e\mathrm{c}_{\alpha} - r_1 \mathrm{s}_{\alpha} & \mathrm{c}_{\alpha} & \mathrm{s}_{\alpha} & -e\mathrm{c}_{\alpha} - r_2 \mathrm{s}_{\alpha} \\ \mathrm{s}_{\alpha} & -\mathrm{c}_{\alpha} & -e\mathrm{s}_{\alpha} - r_1 \mathrm{c}_{\alpha} & -\mathrm{s}_{\alpha} & \mathrm{c}_{\alpha} & e\mathrm{s}_{\alpha} - r_2 \mathrm{c}_{\alpha} \end{bmatrix} \tag{9}$$

ここで，$\mathrm{c}_{\alpha} = \cos\alpha$，$\mathrm{s}_{\alpha} = \sin\alpha$ とおいた．

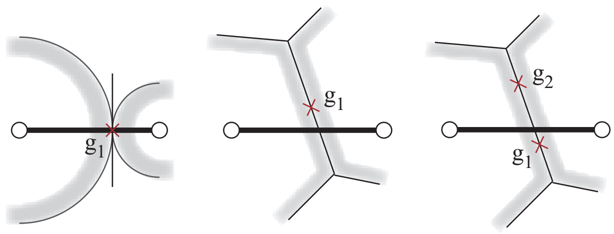
さらに，**Fig. 4** (b) に示すように，全体座標系を (x, y) とし，局所座標系と全体座標系の角度を β とすると，局所座標系の要素節点変位ベクトル $\bar{\boldsymbol{u}}$ と全体座標系の要素節点変位ベクトル $\boldsymbol{U}$ は，座標変換則により，次のように関連付けられる．

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{T}_{\beta} \boldsymbol{U} \tag{10}$$

ここで，$\boldsymbol{T}_{\beta}$ と $\boldsymbol{U}$ の成分は次のようになる．

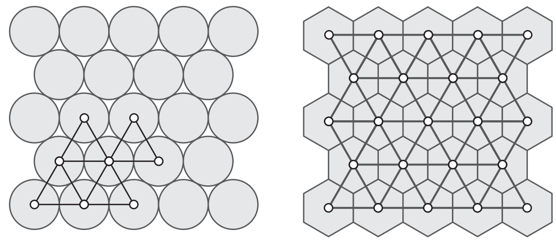


(a) Length of element and section area of joint-surface in 2D

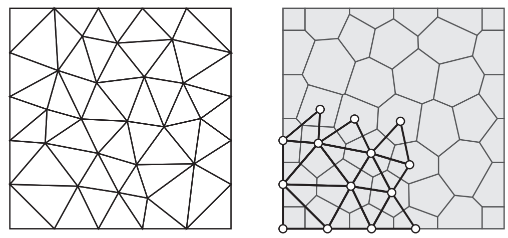


(b) Gaussian integration points along joint-surface

Fig. 5 Element length and Gaussian integration



(a) Structured particle model



(b) Voronoi particle model

Fig. 6 Discrete models with structured and unstructured mesh

$$\boldsymbol{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{U} = \left\{ \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \right\}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

式 (10) を式 (8) に代入することにより，$\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}}$ は次のように表される．

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{g}} = \hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g}}^{\alpha} \boldsymbol{T}_\beta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^{\alpha\beta} \boldsymbol{U} \tag{13}$$

上式において，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^{\alpha\beta}$ の成分は次のようになる．

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^{\alpha\beta} = \left[\begin{matrix} -\mathrm{c}_{\alpha\beta} & -\mathrm{s}_{\alpha\beta} & e\mathrm{c}_\alpha - r_1\mathrm{s}_\alpha \\ \mathrm{s}_{\alpha\beta} & -\mathrm{c}_{\alpha\beta} & -e\mathrm{s}_\alpha - r_1\mathrm{c}_\alpha \end{matrix} \right. \qquad \left. \begin{matrix} \mathrm{c}_{\alpha\beta} & \mathrm{s}_{\alpha\beta} & -e\mathrm{c}_\alpha - r_2\mathrm{s}_\alpha \\ -\mathrm{s}_{\alpha\beta} & \mathrm{c}_{\alpha\beta} & e\mathrm{s}_\alpha - r_2\mathrm{c}_\alpha \end{matrix} \right] \tag{14}$$

ここで，$\mathrm{c}_{\alpha\beta} = \cos(\alpha+\beta)$，$\mathrm{s}_{\alpha\beta} = \sin(\alpha+\beta)$ とおいた．

2.4　要素剛性マトリックス　**Fig. 4** (b) の評価点 g での法線方向 $\hat{x}$ と接線方向 $\hat{y}$ の応力を $\hat{\sigma}_{\mathrm{g}}$ と $\hat{\tau}_{\mathrm{g}}$ とすると，これらを成分にもつ応力ベクトル $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{g}}$ は，法線方向の伸縮弾性係数 E_{n} と接線方向のせん断弾性係数 E_{s} を用いて，次式で表される．

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{g}} = \left\{ \begin{matrix} \hat{\sigma}_{\mathrm{g}} \\ \hat{\tau}_{\mathrm{g}} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} E_{\mathrm{n}} & 0 \\ 0 & E_{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \frac{1}{L} \left\{ \begin{matrix} \hat{u}_{\mathrm{g}} \\ \hat{v}_{\mathrm{g}} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{L} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^{\alpha\beta} \boldsymbol{U} \tag{15}$$

ここで，L は粒子間長さである（**Fig. 5** (a) 参照）．E_{n} と E_{s} は，弾性体における縦弾性係数と横弾性係数と物理的にはほぼ等価であるが，材料としての剛性は構造要素の配置にも依存するので，完全に一対一に対応するものではない．

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{g}}$ を粒子界面で積分することにより，内力ベクトル $\hat{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{g}}$ は次式で求められる．

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{g}} = \left\{ \begin{matrix} \hat{N}_{\mathrm{g}} \\ \hat{S}_{\mathrm{g}} \end{matrix} \right\} = \int_A \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{g}}\, dA = \frac{1}{L} \int_A \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^{\alpha\beta} dA\, \boldsymbol{U} \tag{16}$$

ここで，A は粒子境界の面積（断面積）である（**Fig. 5** (a) 参照）．ポテンシャルエネルギー最小の原理あるいは仮想仕事の原理により，要素剛性マトリックスは次式で表される．

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{L} \int_A \left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^{\alpha\beta} \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^{\alpha\beta} dA \tag{17}$$

具体的な要素剛性マトリックスの計算法として，ガウス積分法を適用すると，**Fig. 5** (b) に示すように，評価点 g をガウス積分点に選ぶだけでよく，i 番目のガウス積分点を g_i とすると，2 次元問題の要素剛性マトリックスは次式により求めることができる．

$$\boldsymbol{K} = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{G}}} w_i \frac{1}{L} \left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}i}^{\alpha\beta} \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}i}^{\alpha\beta} \tag{18}$$

ここで，N_{G} は積分点数，w_i は重み係数，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}i}^{\alpha\beta}$ は積分点 g_i で評価された式 (14) で与えられる変換マトリックスである．

数値解析においては，通常のマトリックス構造解析を行えばよく，また分布荷重の計算や変位自由度の拘束については，低次のソリッド要素と同様の処理が可能である．

2.5　要素剛性マトリックスに関する考察　ここでは，本論文の式 (18) で導出した要素剛性マトリックスと既往の類似手法による要素剛性マトリックスとを比較検討する．まず，1 点積分を採用した場合の要素剛性マトリックスは次式で表される．

$$\boldsymbol{K}_1 = \frac{h}{L} \left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}^{\alpha\beta} \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}^{\alpha\beta} \tag{19}$$

ここで，c は粒子境界面の中央点を意味している．

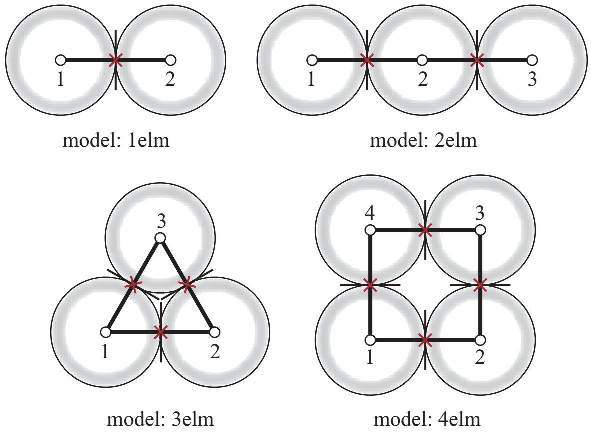


Fig. 7 Discrete models for eigenvalue analysis

Fig. 6 (a) に示すような，一様な球形粒子の集合体を考える．構造要素の配置は正三角形となり，球形粒子の形状は正六角形と見ることができる．したがって，本論文で定義した変数のうち，$r_1 = r_2$，$e = 0$ となり，L と h は全要素において一定値となる．これらを設定して，1 点積分に基づく式 (19) により得られる要素剛性マトリックスは，文献 [18] で示されている要素剛性マトリックスと同様となる．

次に，**Fig. 6** (b) に示すような，ボロノイ分割されたモデルを考える．これに対応する構造要素の配置は，デローニー三角分割となるので，$r_1 = r_2$ となる．1 点積分を行い，式 (19) から得られる要素剛性マトリックスは，文献 [20] で示されている要素剛性マトリックスと同様となる．

文献 [18] では均一の粒子集合，文献 [20] ではデローニー三角分割とボロノイ分割の双対性を仮定する必要があるが，本研究では粒子境界面の角度の任意性を考慮しているので，正確なボロノイ分割である必要はない．粒子分割を行った後に構造要素のメッシュを作成してもよいし，構造要素のメッシュ分割を行った後に粒子分割を行うこともできる．

本研究では，ある評価点における相対変位を，構造要素における e, r_1, r_2 と角度 α, β により表し，数値積分により要素剛性マトリックスを定義している．これに対し，剛体ばねモデル [13] では，全体座標系による座標値を用いて，剛体要素の境界での相対変位を表し，解析的な完全積分により要素剛性マトリックスを求めている．定式化や積分の方法が異なるものの，本論文で示した構造要素の剛性マトリックスは，剛体ばねモデルのそれと基本的には同形式となる．

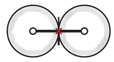
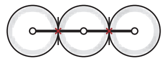
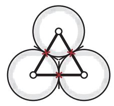
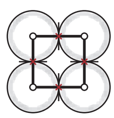
3. 弾性変形に対する検証

本節では，簡単な弾性問題の数値実験を通して，本論文で定式化した構造要素の変形性能や解析精度について検証する．

3.1　固有値解析による基本変形モード　　はじめに，式 (18) から得られる剛性マトリックスの固有値解析を行い，数値積分の次数と基本変形モードとの関係について検討する．

解析対象は，**Fig. 7** に示すような，粒子配置の異なる基本的な 1〜4 要素のモデルである．材料パラメータやモデル寸法は，$E_\mathrm{n} = E_\mathrm{s} = 1$, $r_1 = r_2 = h = 1$, $e = 0$ とする．

Table. 1 Number of zero eigenvalue

	1 point integration	2 points integration
 model: 1elm	4	3
 model: 2elm	5	3
 model: 3elm	3	3
 model: 4elm	4	3

要素剛性マトリックスの固有値解析の結果として，各モデルにおけるゼロ固有値の数を **Table. 1** に示す．2 次元の固体変形問題では，剛体運動に関する計 3 つのゼロ固有値を有する必要があるが，1 点積分の結果を見ると，3elm のモデルのみ 3 つのゼロ固有値を有しており，それ以外のモデルでは不要なゼロエネルギーモード（ゼロ固有値に対応する固有ベクトル）を有していることが分かる．これに対して，2 点積分の結果を見ると，すべてのモデルにおいて 3 つのゼロ固有値を有することが分かる．

それぞれのゼロ固有値に対する固有ベクトルによる変形を可視化した結果を **Fig. 8** に示す．3elm では積分次数によらず，ほぼ同様の剛体変形モードとなっているが，その他のモデルでは，2 点積分の場合に正しい剛体変形モードとなることが分かる．以上より，構造要素の配置が三角形とは限らない場合は，積分点数を 2 点にしておく必要がある．

3.2　1 軸状態の再現と境界粒子の修正　　本解析手法は，構造要素を用いて，材料（固体）の変形挙動を解析するものである．ここでは，弾性問題に対する基礎的検証として，1 軸応力状態の再現性を取り上げる．

解析対象は，**Fig. 9** に示すような正方形のモデルとし，構造要素によるメッシュは四角形構造メッシュと三角形メッシュの 2 通りとする．境界条件は，上下方向に単位ひずみとなるよう，モデル上端に強制変位を与えるものとし，材料パラメータは $E_\mathrm{n} = E_\mathrm{s} = 1$ とする．

解析結果として，各モデルの変形の様子と軸方向応力を可視化したものを **Fig. 10** に示す．内部の要素と比較して，外部境界に位置する要素は，粒子の境界面積が相対的に小さくなる．そのため，この図を見て分かるように，外部境界に位置する要素に相対的に大きな応力が生じている．この問題を解消するため，本研究では，境界粒子の境界面積が内部粒子と同程度になるよう，**Fig. 11** (a) に示すように，外部境界に位置する粒子の境界面積を拡張する．これによる結果は，**Fig. 11** (b)

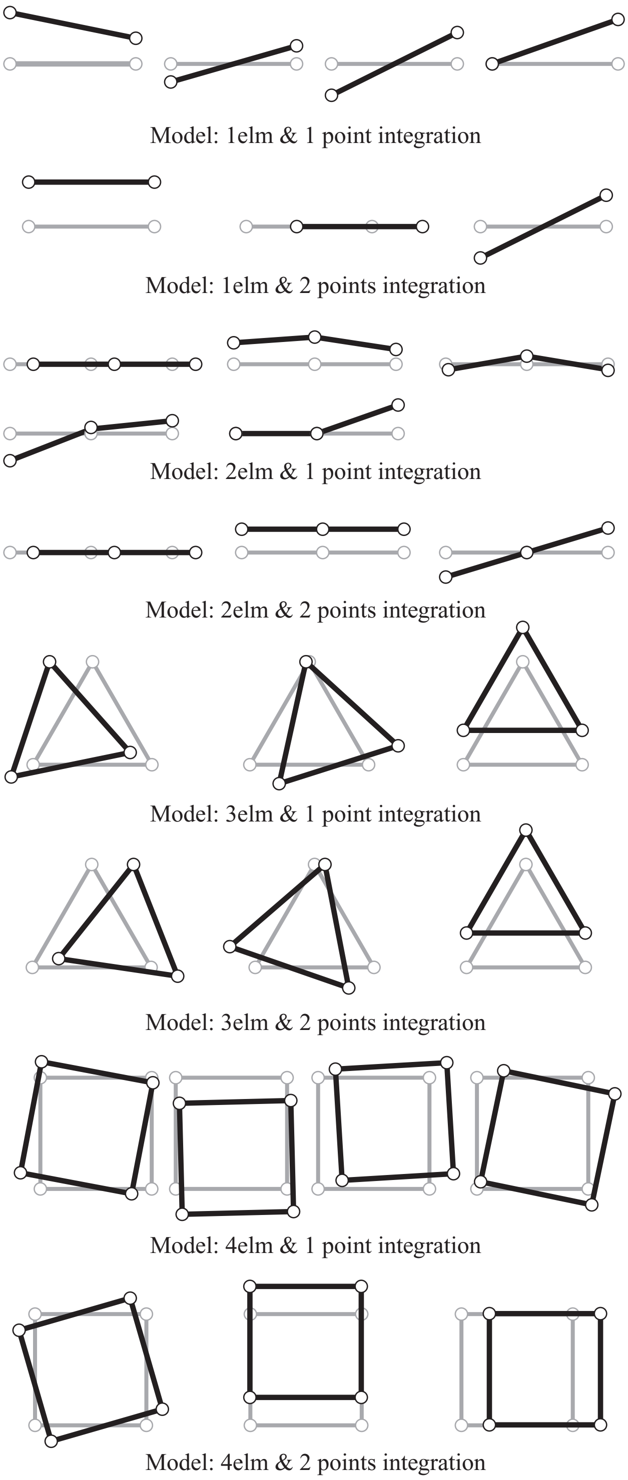


Fig. 8 Deformation modes for zero eigenvalues

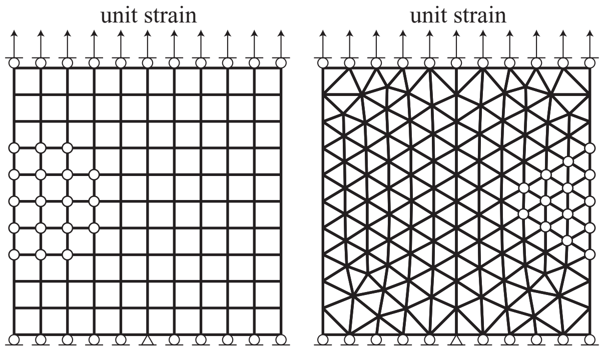


Fig. 9 Structural elements for uniaxial deformation

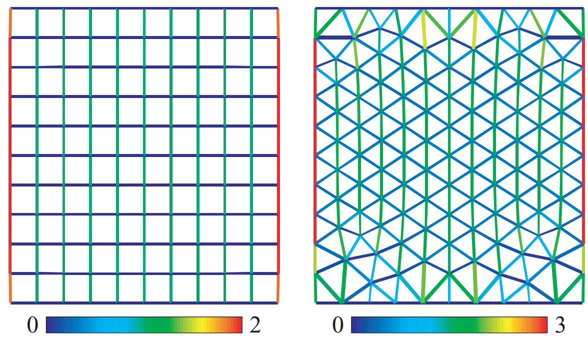
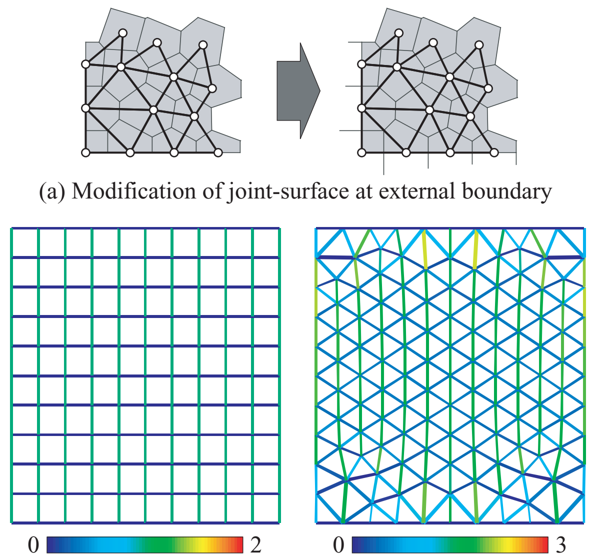


Fig. 10 Distribution of axial stress with deformation



(a) Modification of joint-surface at external boundary

(b) Distribution of axial stress

Fig. 11 Extension of integral boundary and numerical results

のようになり，外部境界の要素の応力は内部の要素とほぼ同程度となる．また，弾性係数とひずみを 1 としているので，軸方向応力の理論値も 1 となる．三角形に配置したモデルでは要素の角度が一様ではないので，応力の値も一様とならないが，正方形に配置したモデルでは要素の方向が変位の方向に一致するので，上下方向の要素では理論解が再現されている．

3.3　はりの曲げ変形に対する解の収束性　一般的なビーム要素とは異なり，本論文における構造要素は曲げ理論に基づいて定式化を行っていないため，ここでは，はりの曲げに対する解析精度と解の収束性について検討しておく．

解析対象は，**Fig. 12** (a) に示すような縦横比 1:5 のはりとし，構造要素によるメッシュは，同図 (b), (c) に示すような四角形メッシュと三角形メッシュの 2 通りとする．解の収束性

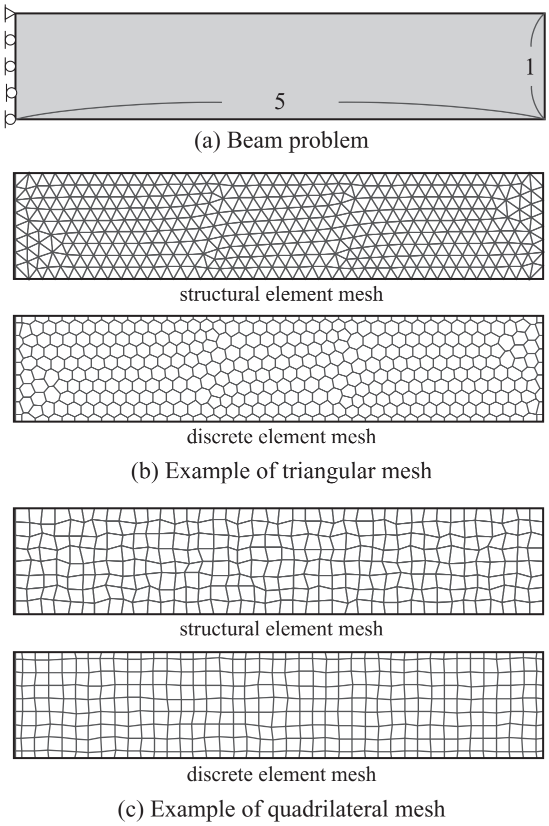


Fig. 12 Discrete model for beam problem

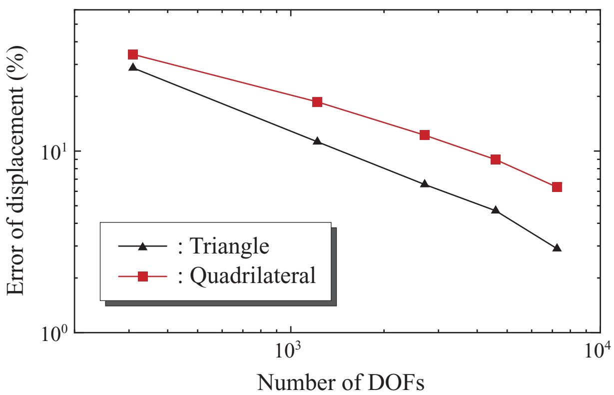
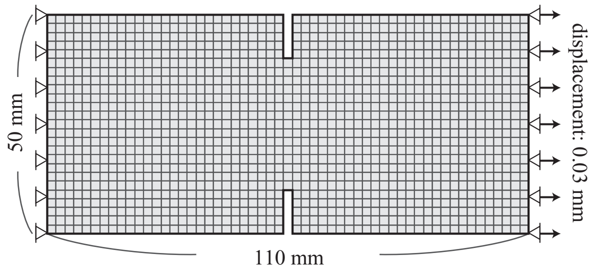


Fig. 13 Error versus number of DOF in beam problem

を調べるため，メッシュサイズおよびパターンの異なる 5 つのモデルを解析する．

はりの理論解と比較するに際し，はりのヤング率が必要となるが，構造要素における E_{n} と E_{s} はヤング率と一対一に対応するものではない．そこで，$E_{\mathrm{n}} = E_{\mathrm{s}} = 1$ とした各モデルに対して，一軸問題の数値実験を行い，弾性解からヤング率を同定する．そして，このヤング率を用いてはりの理論解を算出し，構造要素による数値解との誤差を計算する．

構造要素の全自由度数と誤差の関係を表したものを **Fig. 13** に示す．縦軸における変位の誤差 R_{disp} は，次式により定義した．



E_{n}	E_{s}	f_{n}	G_{f}
20 GPa	20 GPa	1 MPa	0.01 N/mm

Fig. 14 Structural elements for uniaxial tensile fracture

$$R_{\mathrm{disp}} = \left| \frac{u_{\mathrm{Ref}} - u_{\mathrm{str}}}{u_{\mathrm{Ref}}} \right| \times 100 \ \ (\%) \tag{20}$$

ここで，u_{Ref} は曲げ理論による変位解，u_{str} は本論文における構造要素による変位解である．本論文における構造要素は，粒子間の結合をモデル化したものであり，弾性変形をモデル化したものではないので，変位の精度が高いとは言えない．ただし，自由度数の増加に伴い，解が収束していく様子が見て取れることから，離散要素数（粒子数）を増やすことによって，連続体の変形に近い解が得られると考えられる．また，三角形メッシュよりも四角形メッシュの方が剛な結果を示しており，離散要素（粒子）の配置が解析結果に影響することが分かる．

4. 破壊シミュレーションへの応用

本論文における構造要素は，粒子間の境界面における法線方向と接線方向の相対変位とバネを用いて定式化されているため，境界面での破壊挙動をモデル化すれば，材料の破壊シミュレーションへの応用が容易に可能である．以下では，本論文における破壊挙動のモデル化について述べ，切り欠きを有する問題を対象に，材料の破壊シミュレーションへの適用例を示す．

4.1 破壊基準と軟化モデル　本論文では，簡単のため，材料の局所的な引張破壊のみを対象とする．式 (15) に示したように，本研究の構造要素の定式化において，弾性係数マトリックス $\boldsymbol{C}$ は対角行列であるので，伸縮方向とせん断方向とで独立に構成関係を導入可能である．さらに，それぞれの方向に対して 1 次元のモデルになるので，構成モデルの導入が容易である．

材料の引張強度を f_{n} とし，式 (15) における応力 $\hat{\sigma}_{\mathrm{g}}$ を用いて，破壊の発生基準を次のように定めることにする．

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{g}} - f_{\mathrm{n}} = 0 \tag{21}$$

破壊発生後の構成関係として，本論文では次式で表されるような，指数関数型の応力と開口変位関係 [21] を規定する．

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{g}}(w) = f_{\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{f_{\mathrm{n}}}{G_{\mathrm{f}}} w \right) \tag{22}$$

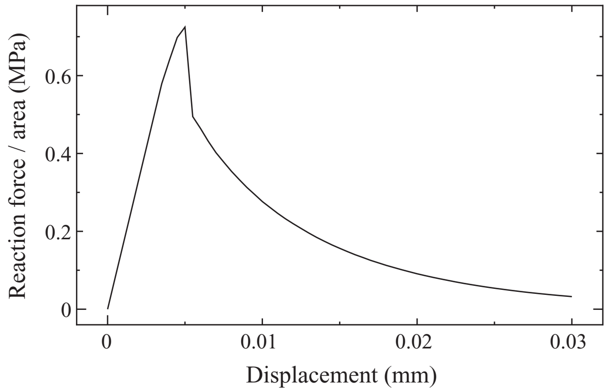


Fig. 15 Load versus displacement in uniaxial tensile fracture

ここで，G_f は破壊エネルギー，w は開口変位であり，本論文では $w = \hat{u}_g$ とする．

増分解法と Newton-Raphson 法の適用は可能であるが，軟化挙動を伴う破壊シミュレーションにおいては，一般に収束解が得られない場合が少なくない．本論文では，k 回目の反復過程における弾性係数を近似的に，

$$E_n^k = \frac{\hat{\sigma}_g(w^{k-1})}{w^{k-1}} L \tag{23}$$

として反復計算を行い，破壊の判定や破壊後の軟化挙動を考慮した破壊シミュレーションを行うこととする．また，本論文では，簡単のため，E_n の低下率と同様に E_s を低下させることにより，引張せん断を考慮することとする．

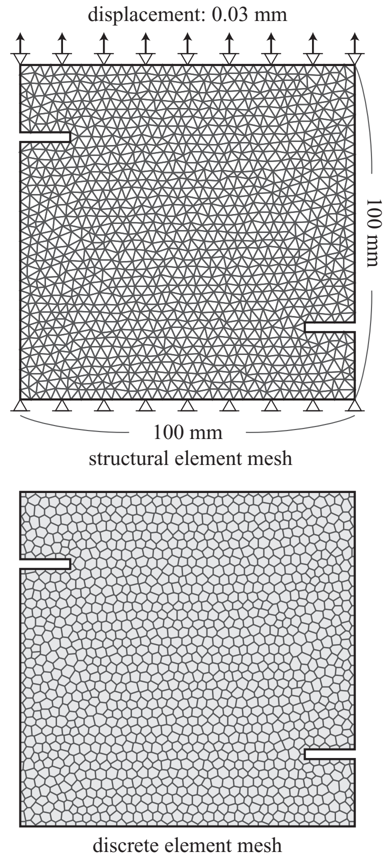
4.2　数値解析例　　数値解析例として，はじめに破壊挙動の再現に関する検証例題を示す．**Fig. 14** に示すような，破壊面の形成場所が自明である単純なモデルを解析対象とし，四角形による構造メッシュを設定し，弾性域から破壊判定と軟化挙動を含む一連の変形・破壊挙動の再現性を検証する．変形・破壊に関するパラメータは同図に示す通りとし，変位制御解析により破壊シミュレーションを行う．

解析結果として，載荷面における荷重－変位関係を **Fig. 15** に示す．この図に示されるように，破壊前の弾性挙動から破壊後の軟化挙動までを再現できていることが分かる．

次に，**Fig. 16** に示すように，切り欠きを有する構造を対象に，破壊シミュレーションへの適用例を示す．解析に用いる構造要素のメッシュと離散要素のメッシュ，および変形・破壊に関するパラメータは図中に示す通りとし，変位制御解析により破壊シミュレーションを行う．

解析結果として，載荷面における荷重－変位関係を **Fig. 17** に，変形・破壊挙動を可視化したものを **Fig. 18** に示す．ここで，**Fig. 18** における各離散要素の変位は，構造要素の節点変位を用いており，コンター図は離散要素内における構造要素の軸方向応力の最大値を表している．

本解析法では，解析対象を離散要素に分割し，構造要素によるマトリックス構造解析の枠組みの中で，離散要素の境界での破壊挙動をモデル化するだけでよいので，クラックが複数同時に生じるような問題であっても，容易に破壊シミュレーションが可能である．



E_n	E_s	f_n	G_f
25 GPa	20 GPa	1 MPa	0.003 N/mm

Fig. 16 Discrete model of double-edge notched structure

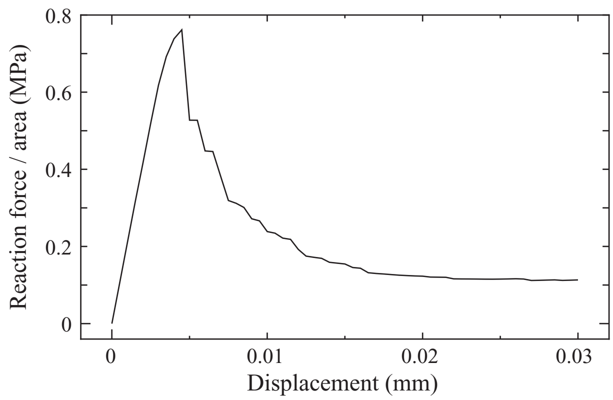


Fig. 17 Load versus displacement in double-edge notched problem

5. おわりに

本論文では，材料を粒子（離散要素）の集合とみなし，離散要素同士の結合・破壊を構造要素でモデル化することにより，破壊の進行を離散的にシミュレート可能な簡易な解析法を構築した．本論文で定式化した本解析法における構造要素

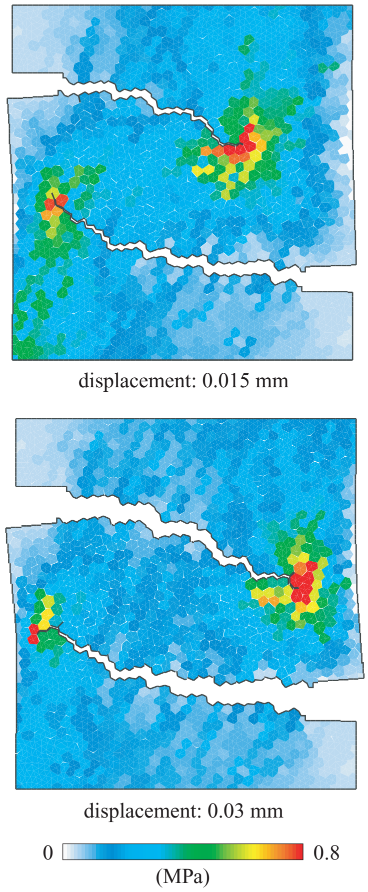


Fig. 18 Numerical results in double-edge notched problem

は，離散要素間の境界での法線方向と接線方向の相対変位・バネ剛性により定式化されているので，境界での破壊挙動のモデル化が容易であり，構造要素によるマトリックス構造解析の枠組みの中で，容易に破壊シミュレーションが可能である．

弾性変形に対する構造要素の検証問題として，まず，剛性マトリックスの固有値解析を行い，積分次数（積分点数）と基本変形モードとの関係を検討した．構造要素を三角形に配置する場合は，積分点数によらず，剛性マトリックスのゼロ固有値の数は 3 つとなるが，それ以外の形状では 2 点積分を行うことにより，ゼロ固有値の数が 3 つになることを示した．1 軸応力状態の再現性に関する検討において，外部境界に沿って構造要素を配置すると，境界上の要素の応力が内部よりも高くなるが，外部境界における離散要素の境界を拡張することにより，内部の要素とほぼ同程度となることを示した．はりの理論解に対する精度検証において，本解析法における構造要素は，変位の精度が高いとは言えないが，自由度数の増加に伴う一定の収束性を示した．また，四角形メッシュよりも三角形メッシュの方が変位の精度が良く，積分点数による影響はほとんどないことを示した．

破壊シミュレーションへの応用に関して，構造要素を用いた本解析法では，解析対象を離散要素に分割し，マトリックス構造解析の枠組みの中で，離散要素の境界での破壊挙動をモデル化するだけでよいので，クラックが複数同時に生じるような問題であっても，破壊シミュレーションを容易に行えることを示した．

本論文では局所的な引張破壊を考慮するに留まったが，今後は圧縮やせん断に関する破壊のモデル化を行い，多様な破壊パターンに対応させる必要がある．また，材料の非均質性の考慮や 3 次元問題への拡張に関しても，研究を進めていく必要がある．

謝 辞

本研究を行うにあたり，文部科学省科学研究費補助金（若手研究 (B): 24760357，基盤研究 (B): 22360176）の援助を受けた．

参考文献

(1) 応用力学委員会 計算力学小委員会：土木工学における計算力学手法の研究動向，土木学会論文集 A2, Vol.68, No.1, pp.31–50.

(2) Z.P. Bazant: Crack band theory for fracture of concrete, *Mater. Struct.*, Vol.16, pp.155–177, 1983.

(3) R.E. Goodman: A model for the mechanics of jointed rocks, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol.94, pp.637–659, 1968.

(4) M. Jirásek: Comparative study on finite elements with embedded discontinuities, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.188, pp.307–330, 2000.

(5) N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.46, pp.131–150, 1999.

(6) 浅井光輝，山岸道弘，寺田賢二郎，永井学志：非局所ボクセル有限要素法の開発とその破壊挙動解析への適用，土木学会論文集，No.759/I-67, pp.233–245, 2004.

(7) 小国健二，堀宗朗，阪口秀：破壊現象の解析に適した有限要素法の提案，土木学会論文集, Vol.766/I-68, pp.203–217, 2004.

(8) P.A. Cundall: A computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock systems, *Proceedings of the Symposium of International Society of Rock Mechanics*, Vol.1 II-1, pp.129–136, 1971.

(9) 伯野元彦：破壊のシミュレーション—拡張個別要素法で破壊を追う—，森北出版，1997.

(10) G.-H. Shi and R.E. Goodman: Two dimensional discontinuous deformation analysis, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.9, pp.541–556, 1985.

(11) 地盤工学会：地盤に関する解析技術（個別要素法）講習会テキスト，地盤工学会，2012.

(12) 日本計算工学会（編），大西有三，佐々木猛，Shi G-H, 不連続性岩盤解析実用化研究会（著）：不連続変形法（DDA），丸善，2005.

(13) 日本計算工学会（編），竹内則雄，上田眞稔，上林厚志，鬼頭宏明，斉藤成彦，冨田充宏，樋口晴紀（著）: 鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析法，丸善，2005.

(14) G.-H. Shi: Manifold method of material analysis, *Transactions of the* 9*th* *Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report*, No.92–1, U.S. Army Research Office, pp.52–204, 1991.

(15) M. Kurumatani, K. Terada: Finite cover method with multi-cover-layers for the analysis of evolving discontinuities in heterogeneous media, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.79, pp.1–24, 2009.

(16) 竹内則雄，草深守人，武田洋，佐藤一雄，川井忠彦 : ペナルティ法を用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析，土木学会構造工学論文集，Vol.46A, pp.261–270, 2000.

(17) E. Schlangen and J.G.M. van Mier: Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures, *Mater. Struct.*, Vol.25, pp.534–542, 1992.

(18) D.V. Griffiths and G.G.W. Mustoe: Modelling of elastic continua using a grillage of structural elements based on discrete element concepts, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.50, pp.1759–1775, 2001.

(19) G. Lilliu and J.G.M. van Mier: On the relative use of micro-mechanical lattice analysis of 3-phase particle composites, *Engng. Fract. Mech.*, Vol.74, pp.1174–1189, 2007.

(20) P. Grassl: A lattice approach to model flow in cracked concrete, *Cem. Concr. Compos.*, Vol.31, pp.454–460, 2009.

(21) G.N. Wells and L.J. Sluys: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.50, pp.2667–2682, 2001.