

コンクリートの破壊力学に基づく 等方性損傷モデルの定式化とその性能評価

An isotropic damage model based on fracture mechanics for concrete and its evaluation

車谷 麻緒¹⁾・寺田 賢二郎²⁾・加藤 準治³⁾・京谷 孝史⁴⁾・檜山 和男⁵⁾

Mao KURUMATANI, Kenjiro TERADA, Junji KATO, Takashi KYOYA and Kazuo Kashiya

¹⁾ 茨城大学 工学部 都市システム工学科 (〒 316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-12-1)

²⁾ 東北大学 災害科学国際研究所 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

³⁾ 東北大学 災害科学国際研究所 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

⁴⁾ 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

⁵⁾ 中央大学 理工学部 都市環境学科 (〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper proposes a new isotropic damage model for quasi-brittle materials and demonstrates its performance in crack propagation analysis for concrete. The suggested damage model is based on fracture mechanics for concrete, and is therefore capable of simulating the quasi-brittle fracture behavior with the fracture energy. We first formulate the damage model in 1-D problem by borrowing the ideas of traction-separation law based on the fracture energy of concrete. And then the damage model is extended to 2-D or 3-D problems by introducing the modified von-Mises equivalent strain. The fundamental characteristics of the suggested damage model are examined in chapter 3. We evaluate the energy balance in 3-point bend test specimen with a single-edge notch, and verify the mesh objectivity of finite element solution with the damage model. Finally, a benchmark test characterized by mixed-mode fracture, which is called Nooru-Mohamed Test, is performed to demonstrate the capability of the suggested damage model.

Key Words : *isotropic damage model, concrete, fracture mechanics, traction-separation law, fracture energy, crack propagation analysis*

1. はじめに

コンクリートや岩盤・地盤などの材料は、完全な脆性材料ではなく、ひずみ軟化を伴って破壊に至る準脆性的な破壊挙動を示す。ひずみ軟化を伴う材料や構造の破壊挙動を効率的かつ精度良く再現することが重要な課題となっており、これまでに数多くの離散化手法や構成モデルの研究開発が行われている。

有限要素法 (FEM) による破壊解析の手法開発に関する研究は、大きく 2 つに分けることができる。ひとつは、スミアードクラックモデルや損傷モデルのように、FEM における応力とひずみを関係付ける構成式において破壊を表現する方法であり、もうひとつは、不連続な変位場を有限要素近似に導入する方法である。近年では、特に、後者による方法が研究されている。たとえば、FEM における形状関数に非適合モードとして不連続性を導入した埋め込み型有限要素⁽¹⁾と呼ばれる方法や、形状関数における解の再現性を不連続変形に応用した拡張有限要素法⁽²⁾や有限被覆法⁽³⁾などが開発されて

おり、メッシュに依存せずに任意の不連続面を追跡する方法や、ひずみ軟化を伴う材料への応用例も示されている^(4,5)。これらの方法は変位の不連続性を高精度に表現できるものの、クラックの幾何形状を追跡する必要があるため、クラックが多発して相互作用する問題や 3 次元解析への応用は容易ではない。

一方で、FEM における構成関係においてクラック・損傷・破壊を表現する方法は、FEM との相性の良さから、長期にわたって研究が行われている。コンクリートに対しては、引張強度・破壊エネルギー・損傷領域幅をパラメータとして、ひずみ軟化挙動を表現するひび割れ帯モデル⁽⁶⁾や、主応力とその方向に基づいてクラックの発生・進展と軟化挙動を表現する回転ひび割れモデル⁽⁷⁾などが提案されている。回転ひび割れモデルは、ひび割れ形成に伴う異方性と軟化挙動を再現できる最も基本的なモデルであるが、解析メッシュとひび割れの形状によっては応力ロッキングなどの問題を生じさせることが知られている^(7,8)。

回転ひび割れモデルでは、ひずみを弾性ひずみと非弾性ひずみに分解し、ひずみ軟化挙動を表現する。これに対して、ひずみの分解を行わずに、損傷の度合いを表す変数を弾性構成式に乗じてひずみ軟化挙動を表現する損傷モデルが提案されている。主なものとして、損傷変数をスカラー関数で表す等方性の損傷モデルや、マイクロブレースモデル⁽⁹⁾に基づ

* 原稿受付 2013 年 04 月 26 日, 改訂年月日 2013 年 07 月 08 日, 発行年月日 2013 年 08 月 12 日. ©2013 年 日本計算工学会.

Manuscript received, April 26, 2013; final revision, July 08, 2013; published, August 12, 2013. Copyright ©2013 by the Japan Society for Computational Engineering and Science.

く異方性の損傷モデルがある。これらは、不連続変形を直接的にモデル化する方法ではないが、コンクリートのひび割れ挙動に関する実験結果を精度よく再現できることが示されている^(10, 11)。ただし、損傷の発展則において、ひずみ軟化の関数形状を決めるために、材料パラメータではない複数のパラメータを設定しなければならず^(12, 13, 14)、また解析結果がメッシュに依存しないための工夫も必要となる。

回転ひび割れモデルや損傷モデルを FEM に組み込んで、ひずみ軟化挙動を解析すると、要素形状や要素サイズに依存した解析結果となることが知られている⁽¹⁵⁾。この問題点（メッシュに対する客観性の欠如）を解決する主な方法として、積分平均モデル⁽¹⁶⁾や勾配モデル⁽¹⁷⁾などの非局所モデルが用いられている。これらを適用することにより、解析結果に対するメッシュ依存性は低減するものの、非局所モデルでは積分半径を、勾配モデルでは勾配パラメータを決定する必要がある、これらのパラメータの物理的意味が不明確であることが課題となっている^(18, 19)。

そこで本研究では、積分平均モデルや勾配モデルなどの非局所モデルを用いずに、コンクリートの破壊力学に基づいて、ひずみ軟化挙動を規定する等方性の損傷モデルの定式化を示す。そして、これをコンクリートのひび割れ進展解析に応用し、提案モデルの妥当性や有効性を検証する。第2節では、まず1次元問題において、エネルギー収支に基づくコンクリートの破壊力学の概念⁽²⁰⁾を損傷モデルに拡張する定式化を示した後、修正 von-Mises モデルによる等価ひずみを用いた多次元問題への拡張について述べる。第3節では、はじめに簡単な検証例題を設定して、提案モデルが変形・破壊におけるエネルギー収支を高精度に評価できることや、メッシュサイズに依存しない解析結果となることを示す。そして、提案モデルを用いたひび割れ進展解析手法を混合モード破壊のベンチマーク問題に適用し、実験と同様のひび割れ経路と応答結果を再現可能であることを示す。

2. 破壊力学に基づく損傷モデルの定式化

本研究で提案する等方性の損傷モデルの定式化を以下に示す。はじめに、1次元問題において、エネルギー収支に基づくコンクリートの破壊力学の概念を損傷モデルに拡張する定式化を示した後、修正 von-Mises モデルによる等価ひずみを用いた多次元問題への拡張について述べる。

2.1 1次元問題における定式化

(1) 損傷モデルにおける応力-ひずみ関係式 1次元の損傷モデルは、フックの法則にスカラー変数 D を用いて、次式で表される。

$$\sigma = (1 - D) E \varepsilon \quad (1)$$

ここで、 σ は応力、 ε はひずみ、 E はヤング率である。 D は損傷の度合いを $0 \leq D \leq 1$ で表す損傷変数であり、損傷がなければ 0、完全に破壊すれば 1 となる。

(2) 破壊エネルギーと結合力-開口変位関係 指数関数を用いて、1次元問題における引張破壊の結合力-開口変

位関係を次式のように仮定する。

$$f = A e^{-Bw} \quad (2)$$

ここで、 f は破壊面での応力伝達を表す結合力、 w は破壊面の開口変位、 A と B は未知パラメータである。

一軸引張強度を f_t とすると、 $w = 0$ のとき、 $f = f_t$ であるので、未知パラメータ A は次のようになる。

$$f_t = A e^0 \rightarrow A = f_t \quad (3)$$

破壊エネルギーの定義は、結合力-開口変位曲線下の面積、または単位面積の破壊面を形成するのに必要なエネルギーである。破壊エネルギーを G_f とすると、破壊エネルギーの定義より、次式を満たす必要がある。

$$G_f = \int_0^\infty f dw = A \int_0^\infty e^{-Bw} dw \quad (4)$$

上式より、未知パラメータ B は次のようになる。

$$G_f = \frac{A}{B} \rightarrow B = \frac{A}{G_f} = \frac{f_t}{G_f} \quad (5)$$

以上より、1次元問題における結合力-開口変位関係は次のように表される。

$$f = f_t e^{-\frac{f_t}{G_f} w} = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} w\right) \quad (6)$$

(3) 損傷モデルへの応用 破壊エネルギーを考慮した結合力-開口変位関係を損傷モデルに応用すること考える。まず、引張強度に達するときのひずみを損傷開始ひずみ ε_0 とし、次式のように定義する。

$$\varepsilon_0 = \frac{f_t}{E} \quad (7)$$

開口変位 w は、要素長さ h_e を用いて、変位-ひずみ関係式により次のように表される。

$$w = \varepsilon h_e - \varepsilon_0 h_e = (\varepsilon - \varepsilon_0) h_e \quad (8)$$

損傷モデルにおいて、破壊面における結合力 f は、次式のように応力 σ で表される。

$$f = \sigma \quad (9)$$

式(7), (8), (9)を式(6)に代入することにより、結合力-開口変位関係は次のようになる。

$$\sigma = E \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{E \varepsilon_0 h_e}{G_f} (\varepsilon - \varepsilon_0)\right) \quad (10)$$

損傷モデルの構成式(1)と同形式になるように上式を書き換えると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{E \varepsilon_0 h_e}{G_f} (\varepsilon - \varepsilon_0)\right) E \varepsilon \\ &= \left[1 - \left\{1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{E \varepsilon_0 h_e}{G_f} (\varepsilon - \varepsilon_0)\right)\right\}\right] E \varepsilon \\ &= [1 - D(\varepsilon)] E \varepsilon \end{aligned} \quad (11)$$

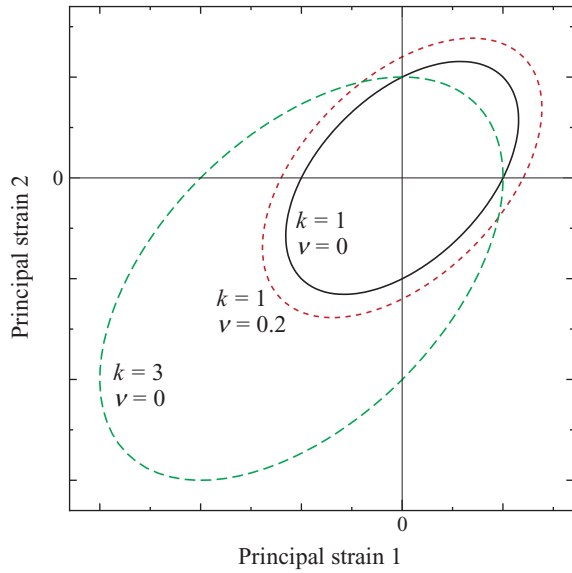


Fig. 1 Contour plot of modified von-Mises equivalent strain

損傷変数 $D(\epsilon)$ における ϵ を変形履歴における最大ひずみ $\epsilon \geq 0$ で表すことにより、損傷変数 $D(\epsilon)$ は次のようになる。

$$D(\epsilon) = 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \exp\left(-\frac{E\epsilon_0 h_e}{G_f} (\epsilon - \epsilon_0)\right) \quad (12)$$

ϵ と ϵ の大小関係によって、現在の荷重状態が載荷または除荷であるかを判定することができる。

$$\begin{cases} \text{if } \epsilon \leq \epsilon & \rightarrow \epsilon = \epsilon \text{ (loading)} \\ \text{if } \epsilon > \epsilon & \rightarrow \epsilon = \epsilon \text{ (unloading)} \end{cases} \quad (13)$$

また、損傷の判定は次のようになる。

$$\begin{cases} \text{if } \epsilon < \epsilon_0 & \rightarrow D = 0 \text{ (undamage)} \\ \text{if } \epsilon \geq \epsilon_0 & \rightarrow D = D(\epsilon) \end{cases} \quad (14)$$

ところで、文献 (10, 12, 13, 14) では、損傷変数 D の発展則として、次式が用いられている。

$$D_{\text{ref}}(\epsilon) = 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} (1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_0)}) \quad (15)$$

ここで、 α と β は実験結果とのキャリブレーション等により決定されるパラメータである。 $\alpha = 1$ とすると、上式は次のようになる。

$$D_{\text{ref}}(\epsilon) = 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_0)} \quad (16)$$

これと式 (12) を比較すると、 β は材料の靱性を表すパラメータを意味し、破壊エネルギーを含む次式で与えられる。

$$\beta = \frac{E\kappa_0 h_e}{G_f} \quad (17)$$

本研究では、コンクリートの破壊力学パラメータを用いて、式 (15) あるいは (16) におけるパラメータを表したことになる。

2.2 多次元問題への拡張

(1) 等価ひずみ 多次元問題における等方性の損傷モデルでは、一般に、スカラー値である等価ひずみを用いて損傷

の進展を記述する。準脆性材料の破壊に適した等価ひずみが、Mazars⁽²¹⁾ や de Vree *et al.*⁽²²⁾ により提案されている。これらのうち、de Vree *et al.*⁽²²⁾ によって提案された修正 von-Mises モデルによる等価ひずみ ϵ_{eq} が、等方性の損傷モデルの研究 (10, 11, 12, 13, 14) で数多く用いられている。本研究においても、次式で与えられる等価ひずみ ϵ_{eq} を用いることとする。

$$\epsilon_{\text{eq}} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} + \frac{1}{2k} \sqrt{\left(\frac{k-1}{1-2\nu} I_1\right)^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2} \quad (18)$$

ここで、 ν はポアソン比、 k は圧縮引張強度比であり、例えばコンクリートでは $k \approx 10$ となる。 I_1 はひずみテンソル ϵ の第 1 不変量であり、次式で表される。

$$I_1 = \text{tr } \epsilon = \epsilon_{kk} \quad (19)$$

J_2 は次式で表される偏差ひずみテンソル e の第 2 不変量である。

$$J_2 = \frac{1}{2} e : e = \frac{1}{2} e_{kl} e_{kl} \quad (20)$$

ここで、 e は次式で与えられる。

$$e = \epsilon - \frac{1}{3} \text{tr } \epsilon \quad (21)$$

2次元の主ひずみ空間に ϵ_{eq} の等値面をプロットした例を Fig. 1 に示す。圧縮強度比によって、引張に弱く、圧縮に強い破壊特性を表現できることが分かる。

(2) 等価ひずみを用いた損傷モデル 多次元問題における等方性の損傷モデルは、1次元問題と同様に、損傷変数をスカラー値関数とすることにより、次式で表される。

$$\sigma = (1 - D) c : \epsilon \quad (22)$$

ここで、 σ はコーシー応力テンソル、 c は弾性係数テンソルである。変形履歴における等価ひずみの最大値を $\kappa \geq 0$ で表すことにより、損傷変数 $D(\kappa)$ は次式で表される。

$$D(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \exp\left(-\frac{E\kappa_0 h_e}{G_f} (\kappa - \kappa_0)\right) \quad (23)$$

$$= 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \quad (24)$$

多次元問題における要素長さ h_e は次式で定める。

$$\text{Triangular element : } h_e = \sqrt{2A_e} \quad (25)$$

$$\text{Tetrahedral element : } h_e = (12V_e)^{1/3} \quad (26)$$

$$\text{Quadrilateral element : } h_e = \sqrt{A_e} \quad (27)$$

$$\text{Hexahedral element : } h_e = V_e^{1/3} \quad (28)$$

ここで、 A_e は 2 次元要素の面積、 V_e は 3 次元要素の体積である。三角形要素の場合は、三角形 2 つで四角形が構成されると仮定し、式 (25) のように要素長を近似する。四面体要素の場合は、四面体 12 個で六面体が構成されると仮定し、式 (26) のように要素長を近似する。なお、載荷・除荷や損傷の判定は式 (13), (14) と同様である。

(3) 接線係数テンソル (材料ヤコビアン) $\kappa < \kappa_0$ (損傷開始前, 弾性域) では, $D = 0$ であり, 材料ヤコビアン $\mathbf{C}$ は次のようになる.

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{c} \quad (29)$$

$\kappa \geq \kappa_0$ and $\kappa \leq \varepsilon_{eq}$ (損傷あり, 載荷) では, $D = D(\kappa)$, $\kappa = \varepsilon_{eq}$ となる. このとき, 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ と材料ヤコビアン $\mathbf{C}$ は次のようになる.

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D(\kappa)) \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (30)$$

$$\mathbf{C} = (1 - D(\kappa)) \mathbf{c} - (\mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial D(\kappa)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (31)$$

$\partial D(\kappa)/\partial \boldsymbol{\varepsilon}$ は, 微分の連鎖則により次式で表される.

$$\frac{\partial D(\kappa)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial D(\kappa)}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{eq}} \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (32)$$

上式における各微分係数は次のようになる.

$$\frac{\partial D(\kappa)}{\partial \kappa} = \frac{\kappa_0}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} + \beta \right) e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{eq}} = 1 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{a_1}{2k} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{4k} \left(a_1^2 I_1^2 + a_2 J_2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(2a_1^2 I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + a_2 \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (35)$$

ここで, a_1 と a_2 は次式を置き換えたものである.

$$a_1 = \frac{k - 1}{1 - 2\nu}, \quad a_2 = \frac{12k}{(1 + \nu)^2} \quad (36)$$

$\kappa \geq \kappa_0$ and $\kappa \geq \varepsilon_{eq}$ (損傷あり, 除荷) では, 損傷を生じているが, その進展はない. このとき, κ が更新されず, $\kappa = \kappa_0$ となるので, 式 (32) は次のようになる.

$$\frac{\partial D(\kappa)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial D(\kappa)}{\partial \kappa} \cdot 0 \cdot \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} \quad (37)$$

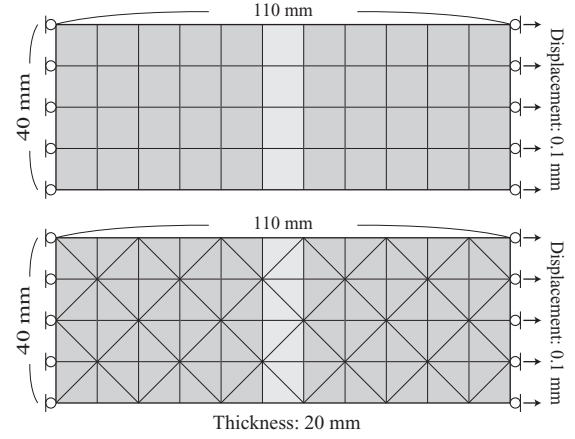
よって, 材料ヤコビアン $\mathbf{C}$ は次のようになる.

$$\mathbf{C} = (1 - D(\kappa)) \mathbf{c} \quad (38)$$

3. 損傷モデルの検証例題

本節では, はじめに簡単な検証例題を設定して, 提案モデルが変形・破壊におけるエネルギー収支を高精度に評価できることや, メッシュサイズに依存しない解析結果となることを示す. そして, 提案モデルを用いたひび割れ進展解析手法を混合モード破壊のベンチマーク問題に適用し, 実験と同様のひび割れ経路と応答結果を再現可能であることを示す. 以下の例題において, ヤング率を E , ポアソン比を ν , 圧縮引張強度比を k , 破壊発生ひずみを κ_0 , 破壊エネルギーを G_f とする.

3.1 一軸引張破壊 はじめに, 一軸引張破壊の数値実験を行い, 本論文で提案する損傷モデルの基本特性を検証する. 解析対象は, Fig. 2 に示すような矩形モデルであり, モデル中央のみが損傷するものとする. 材料パラメータは同図



E	ν	k	κ_0	G_f
20000 MPa	0.0	10	0.0001	0.05 N/mm

Fig. 2 Uniaxial tensile fracture problem

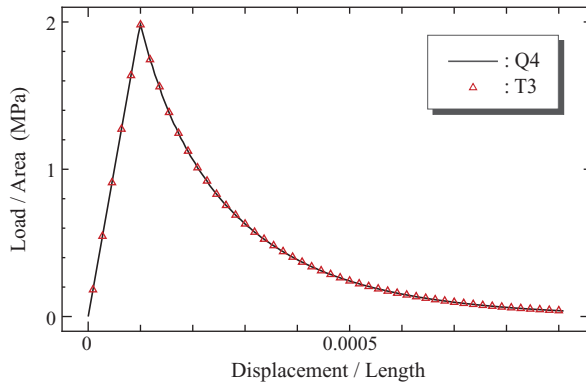
に示す通りとし, ポアソン効果による影響を受けないようポアソン比はゼロとする. 有限要素メッシュは, 同図のような構造メッシュとし, 三角形要素 (T3)・四角形要素 (Q4)・四面体要素 (T4)・六面体要素 (H8) による数値解析を行い, 式 (25)~式 (28) の要素長について検討する. なお, 有限要素はすべて 1 次要素とする.

解析結果として, 荷重-変位関係を Fig. 3 に示す. 図中の縦軸は見かけの応力, 横軸は見かけのひずみを表している. 結果を見て分かるように, 要素の種類によらずほとんど同じ結果が得られている. 四面体要素による結果がその他の結果と若干異なっているが, これは式 (26) で与えた四面体要素における要素長の近似による影響と考えられる.

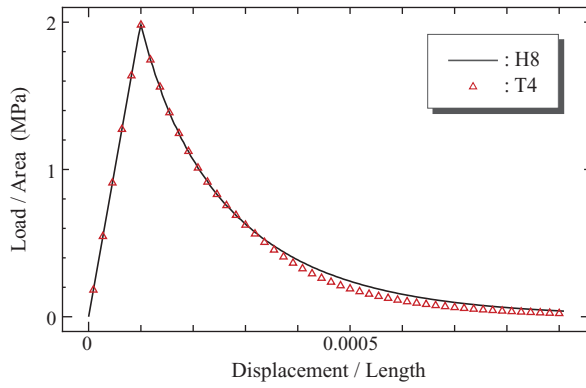
3.2 切欠きを有する梁の 3 点曲げ破壊 破壊エネルギーの定義は, 単位面積の破壊面を形成するのに必要なエネルギー, または単位面積の破壊面を形成する際に散逸されるエネルギーである. J 積分を応用した既往の研究 (23) によれば, 切欠き長さの異なる 2 体の梁供試体の 3 点曲げ試験を行い, 散逸エネルギーの差と切欠き長さの差を利用して, コンクリートの引張軟化特性を求める方法が提案されている. ここでは, その J 積分のエネルギー的性質を利用し, 切欠き長さの異なる梁の 3 点曲げ試験の数値実験を行い, 本論文で提案する損傷モデルのエネルギー的性質について検討する.

(1) 解析対象と条件 解析対象は, Fig. 4 に示すような, RILEM 法 (24) に準じた切欠き梁の 3 点曲げ問題とする. 梁のスパン・高さ・厚さは一定で, 切欠き長さのみが異なる 3 つのモデルを対象とする. 使用した有限要素は双一次四辺形要素である. 同図に示す材料パラメータを設定し, 変位制御によるひび割れ進展解析を行う.

(2) 解析結果と考察 提案モデルによる数値実験結果の荷重-変位関係を Fig. 5 に示す. これらの曲線下の面積を計算すれば, 変形と破壊によって散逸されたエネルギーを求



(a) Load-displacement curves in 2-D simulation



(b) Load-displacement curves in 3-D simulation

Fig. 3 Load versus displacement in uniaxial problem

めることができる。ここでは、切欠き長さの異なるモデルを設定しており、例えば、Model C50 と C40 の散逸エネルギーの差 ΔU_{50-40} を切欠き長さの差 ($\Delta A = 10 \times 100 \text{ mm}^2$) で除せば、 ΔA の破壊面を形成するのに必要なエネルギーを求めることができる。つまり、 $\Delta U/\Delta A$ が見かけの破壊エネルギー G_F となるので、これと材料パラメータに設定した破壊エネルギー G_f を比較することにより、損傷モデルのエネルギー的性質について検討する。

台形積分を用いて、各モデルの散逸エネルギーを計算し、その差 ΔU を切欠き長さの差 ΔA で除すことによって、見かけの破壊エネルギー G_F を計算する。Model C50 と C40 から求めた見かけの破壊エネルギー G_F^{50-40} と Model C60 と C50 から求めた見かけの破壊エネルギー G_F^{60-50} は、次のようになる。

$$G_F^{50-40} = \frac{4.57500 \times 10^2 - 3.5802 \times 10^2}{(50 - 40) \times 100} = 0.09948 \dots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

$$G_F^{60-50} = \frac{5.57980 \times 10^2 - 4.57500 \times 10^2}{(60 - 50) \times 100} = 0.10048 \dots \approx 0.1 \text{ N/mm}$$

数値解析結果から逆解析的に求めた見かけの破壊エネルギー G_F^{50-40} と G_F^{60-50} は、材料パラメータとして与えた $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ を精度良く再現している。この結果から、本論文

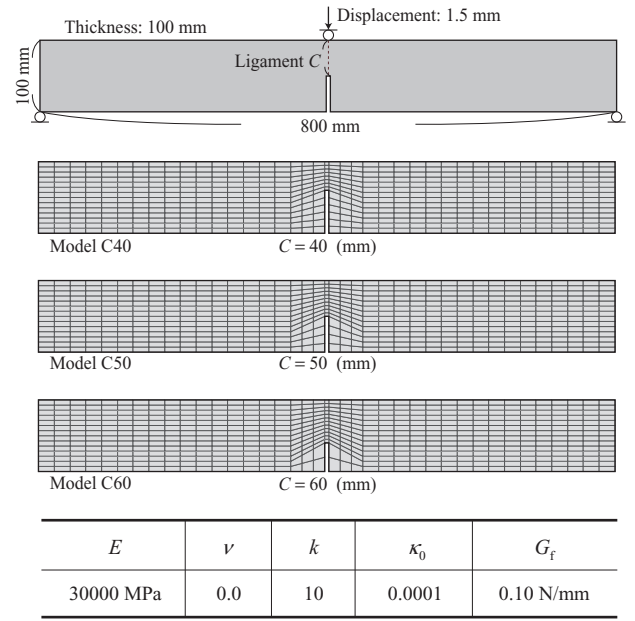


Fig. 4 3-point bend test on beam with a differently-sized single-edge notch

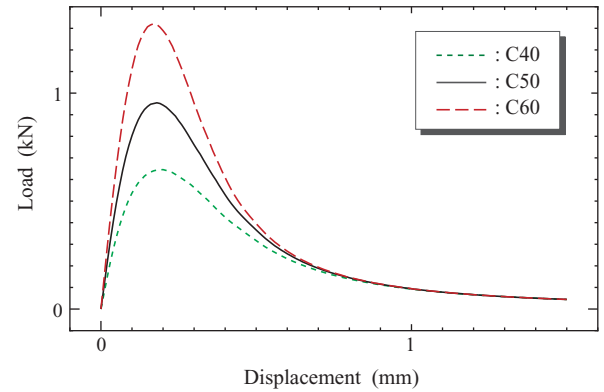


Fig. 5 Load versus displacement in 3-point bend problem

で提案する損傷モデルを用いたひび割れ進展解析は、破壊エネルギーによるエネルギー収支に基づく方法であることが確認できる。

3.3 破壊解析に対するメッシュ依存性の検証 ひずみ軟化を伴う損傷モデルを用いた破壊シミュレーションでは、メッシュサイズに強く依存した解析結果となることが知られている (15, 22)。本節では、モデル寸法とメッシュサイズの異なる破壊シミュレーションを実施し、エネルギー収支に基づく破壊力学を考慮した提案モデルの数理的妥当性を検証する。

解析対象は **Fig. 6** に示す円孔穴あき問題である。Model H1 を基準とし、H2 はモデル寸法とメッシュサイズの両方を H1 の 2 倍としたモデルであり、H3 は H1 とメッシュサイズが同じになるようモデル寸法を 2 倍にしたモデルである。変形・破壊に関する材料パラメータは同図の通りとし、上下・左右ともに対称性のない三角形 1 次要素によるメッシュを用いる

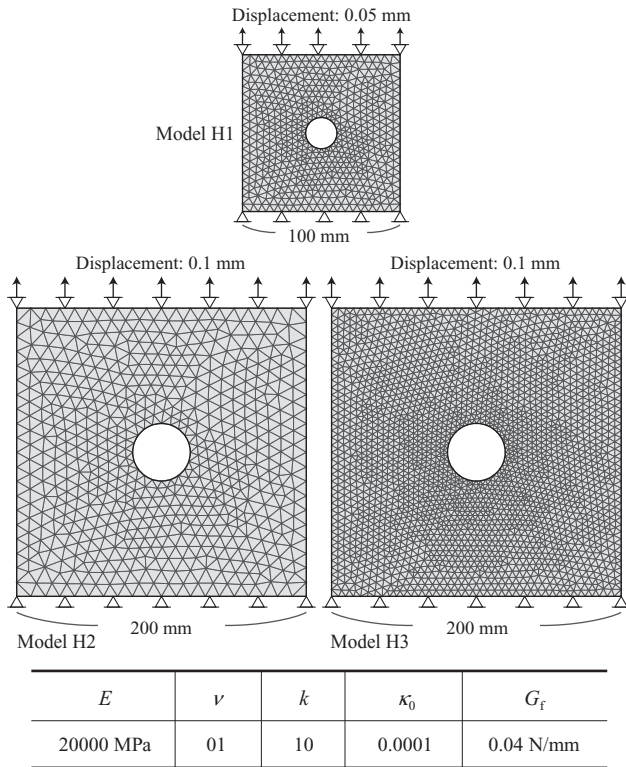


Fig. 6 Tensile fracture problem of differently-sized plate with a circular hole

こととする。

荷重－変位関係を比較した結果を **Fig. 7** に示す。縦軸は荷重を載荷面積で除した見かけの応力、横軸は変位をモデル長さで除した見かけのひずみである。まず、モデル寸法が同じでメッシュサイズのみが異なる Model H2 と H3 の結果を比較すると、両者の結果はほぼ一致しており、提案モデルによる破壊解析はメッシュサイズに依存しないことが分かる。一方、モデル寸法が異なる H1 と H2（または H3）の結果を比較すると、モデル寸法が大きい H2（または H3）の方が脆性的な結果となっており、準脆性材料の破壊力学挙動の特徴であるモデル寸法に依存した応答が得られている。

Fig. 8 は、各モデルにおける損傷の進展を示した結果である。Model H2 と H3 の結果を比較すると、損傷箇所や損傷の進展には、メッシュサイズによる影響がほとんど見られない。以上より、破壊エネルギーによるエネルギー収支を考慮したことにより、提案モデルによる解析結果は、モデル寸法を適切に反映でき、メッシュサイズには影響を受けないことが分かる。

3.4 混合モード破壊 (Nooru-Mohamed Test)

(1) **Nooru-Mohamed Test** 本論文で提案する損傷モデルを用いたひび割れ進展解析手法を混合モード破壊の実験に適用し、実験結果の再現性について検証する。対象とする実験は、Nooru-Mohamed⁽²⁵⁾ が行った、モード I とモード II に相当する引張せん断荷重を与えるモルタル供試体の混合モード破壊実験である。この実験結果は、準脆性材料の破壊解析

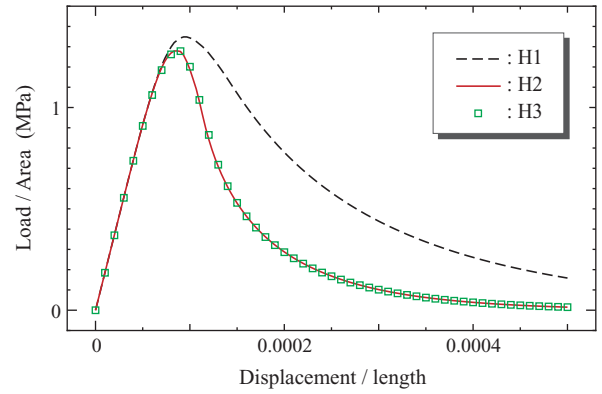


Fig. 7 Load versus displacement in circular hole problem

手法に対する妥当性の検証のためのベンチマーク問題として広く利用されている (11, 26, 27, 28)。

実験の供試体の詳細を **Fig. 9** に示す。供試体は、DENS (Double Edge Notched Specimen) と呼ばれる 2 本の切欠きが入ったモルタル供試体であり、荷重を与えるための剛板 (T, B, L, R) が 4 箇所に取り付けられている。このうち、B と R を固定し、各剛板の直立性を保ったまま、L に常時一定の水平圧力を与えながら、T に引張変位を増分的に与えていく載荷条件が課されている。実験ではせん断荷重の与え方が数ケース示されているが、本論文では 10 kN を与える荷重ケースを対象とする。

(2) **解析条件** Nooru-Mohamed 問題の再現解析に用いる有限要素メッシュは、**Fig. 10** に示すような、上下・左右ともに対称な四角形メッシュと三角形メッシュとする。有限要素は、どちらも 1 次要素とする。剛板の直立性を保つため、剛板 T と L、B と R を連結させてモデル化する。変形・破壊に関する材料パラメータは同図に示す通りとし、剛板のヤング率は供試体の 100 倍とする。変位と荷重の条件については、モデル下面の y 方向変位を拘束し、側面に常時一定の水平荷重 10 kN を与えながら、上面の y 方向のみに強制変位を増分的に与えていく。対称な数値解析結果を得るために、x 方向の変位を一切拘束しないでひび割れ進展解析を行うこととする。剛板とモルタル部の境界において、剥離破壊が起こりうるが、本研究の数値解析では既往の研究 (26, 27, 28) と同様に、剥離発生を考慮しないこととする。

(3) **解析結果と考察** 損傷の進展を表した解析結果を **Fig. 11** に示す。実験結果のひび割れ分布を表した **Fig. 9** と比較して、本論文で提案する損傷モデルを用いたひび割れ進展解析による結果は、実験結果とほぼ同様の損傷分布となっていることが分かる。本研究では、モード I 破壊やモード II 破壊を区別せずに、修正 von-Mises モデルによる等価ひずみを破壊の判定基準に採用したが、提案手法による解析結果は混合モード破壊の実験結果を的確に再現しており、提案手法の妥当性を示している。

荷重－変位関係を比較した結果を **Fig. 12** に示す。図中、実験結果⁽²⁵⁾ は 2 本示している。また、数値解析の参照解とし

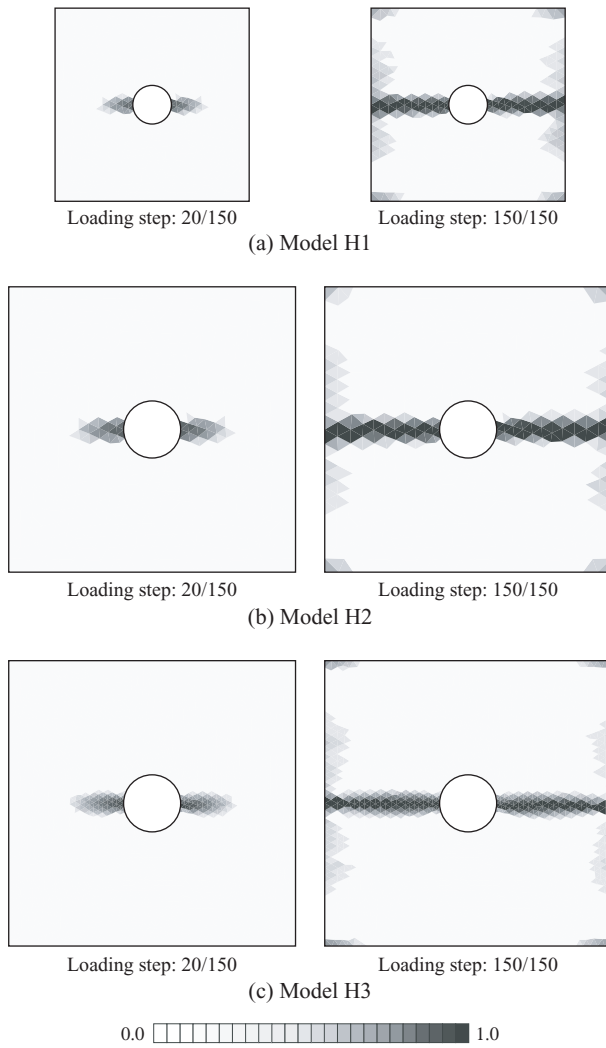


Fig. 8 Propagation of damage in circular hole problem

て、X-FEM による解析結果⁽²⁸⁾も併記している。提案モデルによる解析結果と実験結果とを比較すると、ピーク強度とピーク後の軟化挙動の形状はほぼ一致しており、本解析手法の妥当性・有効性が示されている。四角形メッシュと三角形メッシュの結果を比較すると、三角形メッシュの結果の方が脆性的な挙動となっている。この例題のように、損傷（ひび割れ）が斜め方向に進展する問題に対して、四角形構造メッシュを適用すると、Fig. 11 のように損傷がジグザグに進展し、三角形メッシュの結果よりも損傷領域の幅が広がる。これにより、三角形メッシュでは相対的に損傷領域の幅が狭くなり、三角形メッシュを用いた結果の方が脆性的になったと考えられる。

また、本研究では、修正 von-Mises モデルによる等価ひずみを破壊の判定基準に採用しており、この等価ひずみは Fig. 1 に示したように、ポアソン効果に影響を受ける。この例題では、ポアソン比を 0.2 と設定したが、ポアソン比を 0.0 とすると、ピーク強度が少し上昇して、参照解として併記した X-FEM による解析結果に近い結果となる。

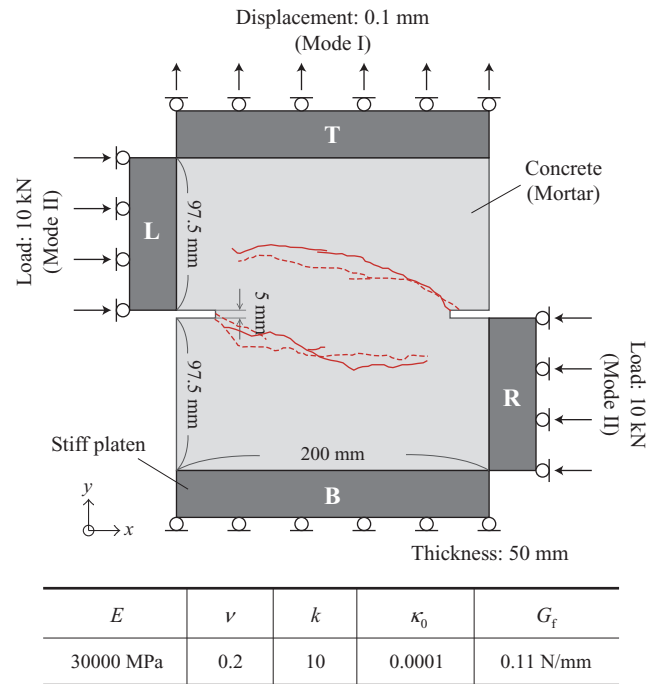


Fig. 9 Nooru-Mohamed problem

4. おわりに

損傷モデルに関する既往の研究の多くは、メッシュサイズによる依存性を回避するために、物理的解釈が不明確なパラメータを必要とする積分平均モデルや勾配モデルなどの非局所モデルを用いている。また、材料パラメータではなく、関数形状に関するパラメータを用いて、損傷の発展則を規定する損傷モデルが多い。

本論文では、積分平均モデルや勾配モデルなどの非局所モデルを用いずに、コンクリートの破壊力学に基づいて、ひずみ軟化挙動を規定する等方性の損傷モデルを提案した。そして、これをコンクリートのひび割れ進展解析に応用し、提案モデルの妥当性や有効性を検証した。

まず、1次元問題において、エネルギー収支に着目したコンクリートの結合力-開口変位関係を損傷モデルに応用する定式化を示した後、修正 von-Mises モデルによる等価ひずみを用いた多次元問題への拡張について述べた。次に、簡単な検証例題を設定して、提案モデルによるひび割れ進展解析がエネルギー収支に基づく方法であることや、メッシュサイズに依存することなく損傷後の挙動を再現可能であることを示した。最後に、提案モデルを用いたひび割れ進展解析手法を混合モード破壊のベンチマーク問題に適用し、実験と同様のひび割れ経路と応答結果を再現可能であることを示した。

本論文では局所的な引張破壊が支配的となる問題を中心に扱ったが、今後は圧縮応力が支配的となる破壊現象への適用性についても検討する必要がある。また、材料の非均質性による影響の大きい問題についても、研究を進めていく予定である。

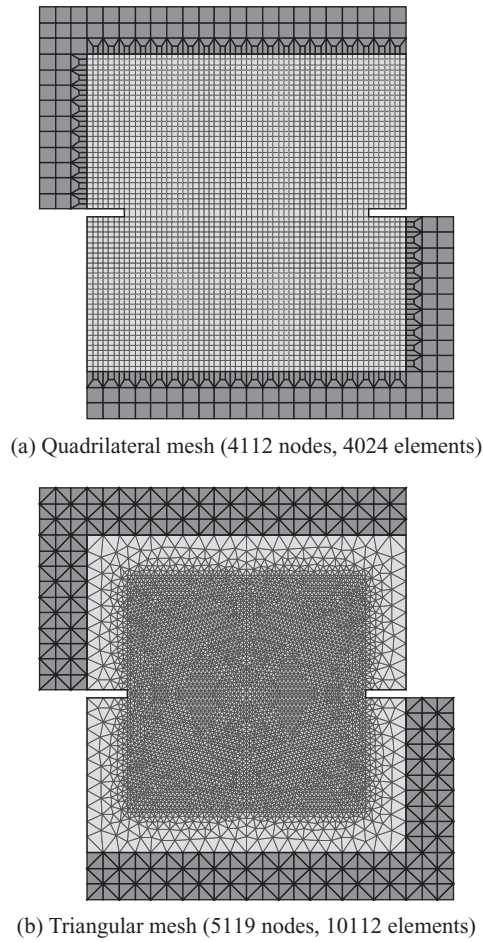


Fig. 10 Finite element mesh for Nooru-Mohamed problem

謝 辞

本研究を行うにあたり、文部科学省科学研究費補助金（若手研究 (B): 24760357, 基盤研究 (B): 22360176）の援助を受けた。

参考文献

- (1) M. Jirásek: Comparative study on finite elements with embedded discontinuities, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **188**, pp.307–330, 2000.
- (2) N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **46**, pp.131–150, 1999.
- (3) K. Terada, M. Asai and M. Yamagishi: Finite cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **58**, pp.1321–1346, 2003.
- (4) G.N. Wells and L.J. Sluys: Application of embedded discontinuities for softening solids, *Engng. Fract. Mech.*, **65**, pp.263–281, 2000.
- (5) M. Kurumatani, K. Terada: Finite cover method with multi-cover-layers for the analysis of evolving discontinu-

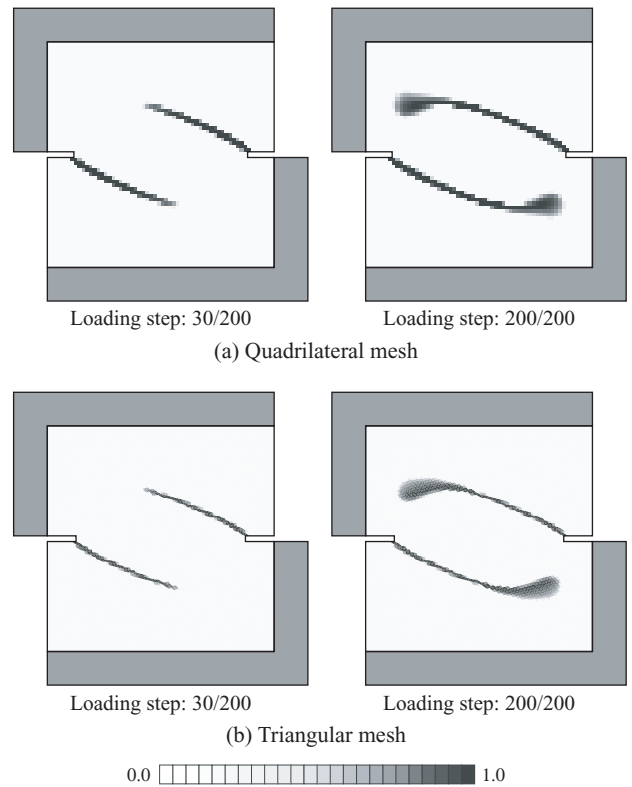


Fig. 11 Propagation of damage in Nooru-Mohamed problem

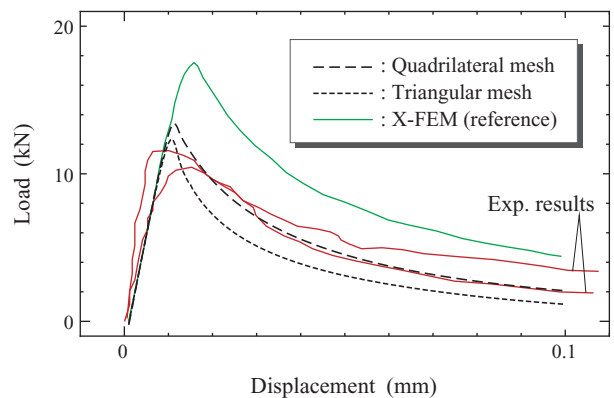


Fig. 12 Load versus displacement in Nooru-Mohamed problem

- ities in heterogeneous media, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **79**, pp.1–24, 2009.
- (6) Z.P. Bažant and B.H. Oh: Crack band theory for fracture of concrete, *Mater. Struct.*, **16**, pp.155–177, 1983.
- (7) M. Jirásek and T. Zimmermann: Analysis of rotating crack model, *J. Engrg. Mech.*, **124**, pp.842–851, 1998.
- (8) M. Jirásek and T. Zimmermann: Rotating crack model with transition to scalar damage, *J. Engrg. Mech.*, **124**, pp.277–284, 1998.
- (9) Z.P. Bažant and J. Ožbolt: Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures, *J. Engrg.*

Mech., **116**, pp.2485–2505, 1990.

- (10) M.G.D. Geers, R. de Borst and R.H.J. Peerlings: Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams, *Engng. Fract. Mech.*, **65**, pp.247–261, 2000.
- (11) M. Jirásek and P. Grassl: Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models, *Engng. Fract. Mech.*, **75**, pp.1921–1943, 2008.
- (12) R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans and M.G.D. Geers: Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture, *Mech. Cohes.-Fric. Mater.*, **3**, pp.323–342, 1998.
- (13) A. Rodríguez-Ferran, T. Bennett, H. Askes and E. Tamayo-Mas: A general framework for softening regularisation based on gradient elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, **48**, pp.1382–1394, 2011.
- (14) C. Giry, F. Dufour and Jacky Mazars: Stress-based non-local damage model, *Int. J. Solids Struct.*, **48**, pp.3431–3443, 2011.
- (15) G. Pijaudier-Cabot and Z.P. Bažant: Nonlocal damage theory, *J. Engrg. Mech.*, **113**, pp.1512–1533, 1987.
- (16) Z.P. Bažant and G. Pijaudier-Cabot: Nonlocal damage, localization instability and convergence, *J. Appl. Mech.*, **55**, pp.287–293, 1988.
- (17) R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans and J.H.P. de Vree: Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **39**, pp.3391–3403, 1996.
- (18) Z.P. Bažant and G. Pijaudier-Cabot: Measurement of characteristic length of nonlocal continuum, *J. Engrg. Mech.*, **115**, pp.755–767, 1989.
- (19) E. Kuhl, E. Ramm and R. de Borst: An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **183**, pp.87–103, 2000.
- (20) A. Hillerborg, M. Modéer and P.-E. Petersson: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cem. Concr. Res.*, **6**, pp.773–782, 1976.
- (21) J. Mazars: A description of micro- and macroscale damage of concrete structures, *Engng. Fract. Mech.*, **25**, pp.729–737, 1986.
- (22) J.H.P. de Vree, W.A.M. Brekelmans and M.A.J. van Gils: Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics, *Comput. Struct.*, **55**, pp.581–588, 1995.
- (23) V.C. Li, C.-M. Chan and C.K.Y. Leung: Experimental determination of the tension-softening relations for cementitious composites, *Cem. Concr. Res.*, **17**, pp.441–452, 1987.
- (24) RILEM Draft Recommendation (50-FMC): Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams, *Mater. Struct.*, **18**, pp.285–290, 1985.
- (25) M.B. Nooru-Mohamed: Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach, *Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft*, 1992.
- (26) M. di Prisco, L. Ferrara, F. Meftah, J. Pamin, R. de Borst, J. Mazars and J.M. Reynouard: Mixed mode fracture in plain and reinforced concrete: some results on benchmark tests, *Int. J. Fract.*, **103**, pp.127–148, 2000.
- (27) M. Cervera and M. Chiumenti: Smeared crack approach: back to the original track, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **30**, pp.1173–1199, 2006.
- (28) P. Dumstorff and G. Meschke: Crack propagation criteria in the framework of X-FEM-based structural analyses, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **31**, pp.239–259, 2007.