Transactions of JSCES, Paper No.20140012

弾塑性複合材料のトポロジー最適化における解析的感度の精度検証

Accuracy validation of analytical sensitivity in topology optimization for elastoplastic composites

加藤 準治[1], 干場 大也[2], 高瀬 慎介[1], 寺田 賢二郎[1], 京谷 孝史[2]

Junji KATO, Hiroya HOSHIBA, Shinsuke TAKASE, Kenjiro TERADA and Takashi KYOYA

[1] 東北大学災害科学国際研究所 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

[2] 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

The present study proposes a topology optimization of composites considering elastoplastic deformation to maximize the ductility of a structure under a prescribed material volume. The concept of a so-called *multiphase material optimization*, which is originally defined for a continuous damage model, is extended to elastoplastic composites with appropriate regularization for material properties in order to regularize material parameters between two constituents. For optimization applying a gradient-based method, the accuracy of sensitivities is critical to obtain a reliable optimization result. In this study, we formulate the analytical sensitivity for topology optimization considering elastoplastic composites and observe its accuracy by comparing with that evaluated from the finite difference approach. It was verified that the proposed method can provide highly accurate sensitivity enough to obtain reliable optimization results.

Key Words: multiphase topology optimization, analytical sensitivity analysis, elastoplasticity, composites

1. はじめに

繊維補強プラスチックや合金，コンクリートをはじめとする構造用複合材料は，目的や用途に応じた様々な機能発現を期待して開発されている．力学的な視点からみた複合材料の利点のひとつは，性質の異なる材料をうまく組み合わせることによって，複合化された材料の力学的挙動を任意に制御できる点にある．これにより，応用すべき環境や条件に合わせて，意図した力学的性質を持つ材料を得ることが可能となる．

現在では，複合材料を構成する各材料の材料非線形性を十分に考慮し，その力学的な特性（長所）を発揮させることを意図した構造設計が行われるようになってきている．特に，低降伏点鋼合金の塑性変形性能を利用した金属製制震ダンパーや，脆性的な破壊を抑制する繊維補強コンクリートなど，構造に塑性化が生じることを前提として，そのダクティリティーの改善を目的としたものが多く見受けられる．これらの力学的挙動を考慮した設計は非常に複雑であることから，近年ではコンピュータを使った数値実験を取り入れ，目的や所与の条件を満足する最適構造を求めるようなアプローチが取られている．しかし，これらの数値解析技術を持ってしても，最適な構造を見いだすことは困難であり，数値計算のトライアルアンドエラーに陥る結果となる．このような背景から，複合材料の材料非線形特性を活かして構造のダクティリティを改善するための構造最適化手法の開発が求められている．

ところで，構造最適化に関する研究については，扱う構造問題が複雑になると計算コストが膨大になり，また理論も難解となることからその多く研究が線形弾性体の単一材料からなる単純な構造に限定した問題を対象としている．単一材料の材料非線形性を考慮した最適化の研究については，感度解析を主題とする様々な研究成果が報告されている．幾つか例を挙げると，塑性材料モデルに関していえば，Yuge and Kikuchi(1)，Schwarz and Ramm(2)，Maute et al.(3), Schwarz et al.(4) は連続体モデルを対象とした最適化問題を，Choi and Santos(5) や Ohsaki and Arora(6) はトラス構造などのような離散的な構造における弾塑性挙動を考慮した最適化問題を紹介している．また，連続体損料モデルを対象としたものでは Bugeda et al.(7) の形状最適化手法に関する研究報告がある．

一方，複合材料を対象とした構造最適化の研究は，繊維強化複合材料における繊維の最適方向角を決定する問題 (8, 9) や構成材料の最適配置を決定する問題 (10, 11)

* 原稿受付 2014 年 03 月 02 日, 改訂 2014 年 09 月 08 日, 発行 2014 年 09 月 29 日. ©2014 年日本計算工学会.
Manuscript received, March 02, 2014; final revision, September 08, 2014; published, September 29, 2014. Copyright ©2014 by the Japan Society for Computational Engineering and Science.

が多く報告されているが，単一材料の場合と同様にその殆どが線形弾性域を対象としたものである．また，複合材料と材料非線形性の両方を考慮した最適化手法に関する研究報告については，著者らの知る限り数少ない．例えば，Swan and Kosaka [12] は，古典的な Voigt–Reuss 混合式を用いた弾塑性材料のトポロジー最適化に関する研究を報告し，Bogomolny and Amir[13] は，鉄筋コンクリートのトポロジー最適化問題に Drucker-Prager の塑性モデルを考慮している．また，複合材料に連続体損傷モデルを組み入れた最適化問題としては，Kato et al.[14][15]，Amir[16] の研究報告しか見当たらない．

それゆえ，本研究では既に述べた「複合材料の材料非線形特性を活かして構造のダクティリティを改善する」ための一つの方法として，複合材料の弾塑性変形挙動を考慮してその最適な材料配置を決定するトポロジー最適化問題を取り扱う．

ところで，この最適化問題を扱う上で重要となるのが構造の非線形挙動を考慮した感度解析法およびその精度である．塑性材料に関する感度の導出法に関しては，これまでに様々な研究成果 (例えば，Kleiber et al.[18]，Kleiber[19], Ohsaki and Arora[6], Schwarz and Ramm[2]，Maute et al.[3], Schwarz et al.[4], Zhang and Kiureghian[20], Hisada[21]) が報告されている．

塑性材料を扱う上での課題は，降伏点，あるいは荷重除荷点において応力–ひずみ関係が微分不可能な状態になり，そこでの応力感度（応力の設計変数に関する微分）を正しく評価することが困難となる点である．Ohsaki and Arora[6] は，この問題を詳細に検討しているがトラス構造を対象としたため，連続体からなる構造物についても同等の検討が必要である．上記の感度解析に関する研究報告において高精度の感度を得るための条件として明らかになっているのは，(i) Euler 型の後退積分法で consistent な弾塑性接線係数を用いること [20]，(ii) リターンマッピングアルゴリズムによる応力積分法を用い，感度解析においてもそれに整合した感度を導出する必要があること [21] である．

このような背景から，本研究では Hisada[21] らの提案する応力感度の導出法を参考に，複合材料のダクティリティ最大化のための新たな感度導出法を定式化するとともに，得られた感度の精度検証を実施することを主題とする．ダクティリティについては 3.2 節で目的関数として定義するが，本論文では外力のなす仕事量あるいは構造に与えられるエネルギーの総和を意味している．なお，本研究で用いる弾塑性材料モデルは，等方性の線形硬化則を用いた von Mises の塑性材料モデルであり，簡単のため異種材料間の界面の力学挙動を考慮しないものとする．また，その応力積分については後退型 Euler 積分にリターンマッピングを採用して consistent 接線係数を用いる．これらについては，既に様々な文献で詳細に記されていることから本文で記述しないが，後の感度の導出法の説明に幾つかの式が必要となるため，巻末の付録に記述することとした．

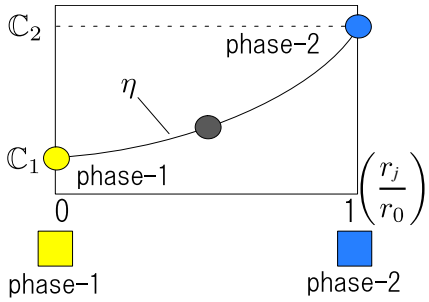

Fig. 1　Concept of two-phase material optimization

2. 設計変数の定義と正則化

2.1　設計変数の定義

本節は，複合材料のトポロジー最適化における設計変数を定義する．提案するトポロジー最適化は，SIMP 法 [22](Solid Isotropic Microstructure with Penalization of intermediate densities) の概念を複合材料に拡張したものである．Fig.1 はその概念を表しており，2 つの固相からなる複合材料を対象とした 2 相材料最適化配置を意図したものである. SIMP 法では，単一材料からなる多孔質体を想定し，設計変数は有限要素ごとに設定された材料密度として定義されるが，本研究では 2 相の複合材料を想定するため，設計変数は phase-1 と phase-2 の材料体積比に置き換えられる．したがって，N 個の有限要素で離散化された j 番目の要素について，設計変数 $s_j\,(j = 1, 2, \cdots, N)$ を以下のように定義する．

$$s_j = \frac{r_j}{r_0} \qquad 0 \le s_j \le 1 \tag{1}$$

ここで，r_j は j 番目の要素における phase-2 の体積，r_0 はその要素の体積である．これにより，各要素は $s_j = 0$ の場合，phase–1 がその要素を占め，逆に $s_j = 1$ のときは，phase–2 がそれを占用する．また，$0 < s < 1$ の場合は二つの相の混合物であると考える．ちなみに，この設計変数を用いて単一材料（多孔質材料）の最適化を行う場合は，phase-2 の材料定数を固体材料のそれに設定し，phase-1 の材料定数を 0 に設定すればよい．

2.2　弾塑性材料モデルの正則化

付録 A で記述した弾塑性モデルの材料パラメータは，弾性剛性テンソル $\mathbb{C}$，加工硬化係数 E^{h}，初期降伏応力 σ_{y} の 3 つである．本研究においては，これらの有効材料パラメータをそれぞれ設計変数 s_j を用いて以下のように設定した．

$$\mathbb{C}_j = \begin{cases} \left(1 - s_j^{\eta}\right)\mathbb{C}_1 + s_j^{\eta}\mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_1 \le \mathbb{C}_2 \\ \left(1 - s_j\right)^{\eta}\mathbb{C}_1 + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^{\eta}\right\}\mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_1 > \mathbb{C}_2 \end{cases} \tag{2}$$

$$E_j^{\mathrm{h}} = \begin{cases} \left(1 - s_j^{\eta}\right)E_1^{\mathrm{h}} + s_j^{\eta}E_2^{\mathrm{h}} & E_1^{\mathrm{h}} \le E_2^{\mathrm{h}} \\ \left(1 - s_j\right)^{\eta}E_1^{\mathrm{h}} + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^{\eta}\right\}E_2^{\mathrm{h}} & E_1^{\mathrm{h}} > E_2^{\mathrm{h}} \end{cases} \tag{3}$$

$$\left(\sigma_{\mathrm{y}}\right)_j = \begin{cases} \left(1 - s_j^{\eta}\right)\sigma_{\mathrm{y1}} + s_j^{\eta}\sigma_{\mathrm{y2}} & \sigma_{\mathrm{y1}} \le \sigma_{\mathrm{y2}} \\ \left(1 - s_j\right)^{\eta}\sigma_{\mathrm{y1}} + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^{\eta}\right\}\sigma_{\mathrm{y2}} & \sigma_{\mathrm{y1}} > \sigma_{\mathrm{y2}} \end{cases} \tag{4}$$

このように2種材料を滑らかな関数で内挿補間することを正則化とよぶ．これらの式は，著者ら[14]による損傷モデルを用いた2相材料最適化における正則化法を塑性材料に適用したものである．これにより各要素における材料パラメータが設計変数に依存することになり，構造のトポロジーを制御する設計変数が埋め込まれることになる．

3. 最適化問題の設定

3.1 つり合い方程式および仮定条件 本節では，解くべきつり合い方程式および本研究で仮定した条件について簡単に説明する．本研究では，非線形構造問題を準静的に解くものとし，ここでは擬似的な時刻（あるいは荷重ステップ）を表す変数 n を用いてつり合い方程式を記述する．ここで，現時刻を $n+1$ で表すとすれば，現時刻のつり合い方程式の弱形式，すなわち仮想仕事式は以下のように書くことができる．

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \lambda_{n+1}\int_{\Gamma_\mathrm{t}} \boldsymbol{t}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Gamma_\mathrm{t} = 0 \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソル，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は線形ひずみテンソルである．また，Ω は物体の体積，Γ_t は，荷重境界である．また，$\boldsymbol{t}_0$ は基本の表面力ベクトルで一定値とし，λ_{n+1} は現時刻における荷重係数で未知数である．よって，荷重ベクトル全体としては未知であると言える．なお，ここでは変位制御法によって解を求めるものとする．そのため，変位制御点に所与の変位増分を与えたときに，つり合い条件を満たす荷重係数 λ_{n+1} と変位制御点以外の節点変位ベクトルを求めることとなる．また，簡単のためここでは物体力を考慮していないがつり合い式の一般性は失わない．

これらを準備した上で，本研究では「荷重が変位制御点だけに作用する」という特別な荷重条件を仮定した．この仮定を設定した理由は，後述の第4節の感度の導出に関係するものであり，そこでその詳細を述べることとする．

3.2 最適化問題 本研究では，複合材料の塑性変形下にある構造のダクティリティを目的関数とし，それを最大化する．このダクティリティは制御点変位に関する仕事量として表すことができ，その仕事量は，荷重–変位曲線が囲う面積として求められる．また，制約条件としては，構造全体の使用材料を一定に制限するものとする．目的関数 $f(\boldsymbol{s})$ および等式制約条件 $h(\boldsymbol{s})$ を以下のように設定する．

$$\begin{aligned}\text{minimize} \quad f(\boldsymbol{s}) &= -\int_{\Omega}\int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega \\ &= -\int_{\Omega}\int_{\hat{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{subject to} \quad h(\boldsymbol{s}) = \int_{\Omega} s_j\,\mathrm{d}\Omega - \hat{V} = 0 \tag{7}$$

t は時間を意味し，$(\dot{\bullet})$ は時間微分を指す．$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は制御点変位 $\hat{\boldsymbol{u}}$ に従う全ひずみであり，$\hat{V}$ は構造全体の phase-2 の体積，$\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{s} = \{s_1, ..., s_N\}$ で表される設計変数（ベクトル）である．この最適化問題は，式 (5) のつり合い式を用いて解くことになる．

なお，一般的に最適化問題は最小化問題として設定されるため，ここでは目的関数に –1 を乗じて最小化問題としていることに注意されたい．本研究では最適化アルゴリズムである最適性規準法[17]を用いて，この最適化問題を解くこととする．

4. 感度の導出

4.1 目的関数の感度の導出

本節では，目的関数の感度評価式の導出方法を提案する．本研究では，この非線形構造問題を準静的に解くため，荷重ステップ n を用いて，式 (6) を次式のような増分的なものに書き換える．

$$f(\boldsymbol{s}) = \sum_{n=1}^{n_\mathrm{step}} f_n(\boldsymbol{s}) \tag{8}$$

ここで，n_step は荷重ステップの総数である．f_n は時刻 $n-1$ から時刻 n の間において算出される目的関数値を意味し，次式のように表すことができる．

$$f_n(\boldsymbol{s}) = -\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_n : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_n\,\mathrm{d}\Omega \tag{9}$$

これをもとに目的関数の，あるひとつの設計変数 s_j に対する勾配を求める．なお，以降で簡単のため $\dfrac{\partial}{\partial s_j}$ を $\nabla^*_{s_j}$ と表記する．まず，式 (8) の勾配については，次式のように計算できる．

$$\nabla^*_{s_j} f(\boldsymbol{s}) = \sum_{n=1}^{n_\mathrm{step}} \nabla^*_{s_j} f_n(\boldsymbol{s}) \tag{10}$$

また，式 (9) の勾配については，後の説明との整合を図るため，敢えて時刻 n から現時刻 $n+1$ の間で算出される目的関数値 f_{n+1} について記述すると次式のようになる．

$$\begin{aligned}\nabla^*_{s_j} f_{n+1} &= -\nabla^*_{s_j}\left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\,\mathrm{d}\Omega\right) \\ &= -\int_{\Omega}\left\{\left(\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla^*_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\right\}\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{11}$$

なお，本論文では時刻 n における変数は既知であるものとする．ひずみ増分 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ は現時刻 $n+1$ の構造解析によって求められる変数であるため，その勾配 $\nabla^*_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ を陽的に求めることはできない．このため，$\nabla^*_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ は陰的な微分項と呼ばれる．本研究では，この $\nabla^*_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ を以下の条件のもとに消去することから始める．

まず，式 (5) の仮想変位 $\delta\boldsymbol{u}$ およびそれに対応する仮想ひずみ $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ は任意に選択できるため，式 (5) において $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^*_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ および $\delta\boldsymbol{u} = \nabla^*_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{n+1}$ と置き換えてもそのつり合い式は満足する．

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \mathrm{d}\Omega - \lambda_{n+1} \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t}_0 \cdot \nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{u}_{n+1} \mathrm{d}\Gamma_t = 0 \quad (12)$$

ちなみに，ここでの勾配は設計変数ベクトル $\boldsymbol{s}$ に対する勾配ではなく，設計変数のひとつの成分 s_j に関する勾配であるため，$\nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$（あるいは $\nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{u}_{n+1}$）は仮想ひずみ（あるいは仮想変位）と同じ階数のテンソルである．それゆえ，式 (12) において数学的な次元の不整合は生じない．

これらの式を準備した上で，先に触れたように「荷重が変位制御点だけに作用する」という特別な荷重条件を仮定した上で，感度の導出を行う．まず，変位制御点に課せられる変位成分 $\hat{u}$ あるいはその増分 $\mathrm{d}\hat{u}$ は，設計変数 $\boldsymbol{s}$ とは無関係に荷重条件として決定されるものであるから，その勾配は $\nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\hat{u} = 0$ となる．そのため，制御点全体の変位増分ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{n+1}$（あるいは $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}_{n+1}$）は基本の表面力ベクトル $\boldsymbol{t}_0$ が常に一定で設計変数 $\boldsymbol{s}$ にも依存しないことも加味すると，$\boldsymbol{t}_0 \cdot \nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{u}_{\mathrm{n}+1} = 0$ となることがわかる．これは，式 (12) の左辺第 2 項の被積分項に他ならず，式 (12) は次式のように簡略化できる．

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \mathrm{d}\Omega = 0 \quad (13)$$

これより，この荷重条件のもとで式 (11) の第 2 項は消去することができ，式 (11) は以下のように書き換えられる．

$$\nabla^*_{s_j} f_{n+1} = -\int_{\Omega} \left(\nabla^*_{s_j} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \mathrm{d}\Omega \quad (14)$$

そのため，あとは応力の設計変数に対する勾配 $\nabla^*_{s_j} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ を求めることができれば目的関数の感度が得られることになる．なお，以降で $\nabla^*_{s_j} \boldsymbol{\sigma}$ を応力感度と呼ぶことにする．

一方，Maute ら [3] や Schwarz ら [4]，Schwarz と Ramm[2] もダクティリティ最大化を目的関数とする最適化問題を取り扱っているが，その感度の導出のために，まずは応力増分 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ を

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (15)$$

とし，その応力感度を以下のように直接微分することを出発点としている．

$$\nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \nabla^*_{s_j} \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (16)$$

ここで，$\mathbb{C}^{\mathrm{ep}*}$ は consistent 接線係数テンソルである．次に，式 (16) を式 (11) に代入し，それを式 (10) で足し合わせて次式のように整理し，

$$\nabla^*_{s_j} f = -\int_{\Omega} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \left(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} : \nabla^*_{s_j} \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + 2\, \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \nabla^*_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \right) \mathrm{d}\Omega \quad (17)$$

さらに，前述のように特殊な荷重条件を設定することで陰的項を消去して，次のような目的関数の感度評価式を提案している．

$$\nabla^*_{s_j} f = -\int_{\Omega} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} : \nabla^*_{s_j} \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega \quad (18)$$

この場合，目的関数の感度を得るためには接線係数テンソルの勾配 $\nabla^*_{s_j} \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*}$ を求めればよいことになる．しかし，その出発点である式 (15) は，そもそも構造解析上のつり合い点を求めるために用いられるもので，応力増分を正しく表した式ではないことに注意する必要がある．つまり，Maute et al.[3] や Schwarz et al.[4]，Schwarz and Ramm[2] に示される応力感度の式は，“つり合いを満たす応力” の感度を求めていない．その結果，塑性化が進行するにつれてその応力感度の誤差が蓄積されてゆき，また，降伏点や荷重除荷などによる応力変化点，つまり微分不可能な点近傍において特に大きな誤差が生じることとなる．

そこで，本研究では式 (14) の感度評価式の精度を担保するために，“つり合い方程式を満たす応力” の感度 $\nabla^*_{s_j} \boldsymbol{\sigma}$ を求めることとした．この導出については 4.3 節で詳述するが，各増分ステップにおいてそれまでの履歴の影響を考慮しながら $\nabla^*_{s_j} \boldsymbol{\sigma}$ を更新していくことになる．

なお，以降に記述する条件付き微分および応力感度の求め方は，Hisada et al.[21] の文献を参考に定式化したものである．

4.2 条件付き微分

ここでは，次節で用いることになる条件付き微分の考え方について概説する．弾塑性材料モデルおよび増分解析を用いて最適化を行うとき，例えば応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は，変位 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s})$ と設計変数 $\boldsymbol{s}$ で構成される関数とみなすことができる．よって，現時刻 $n+1$ における $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ は

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \left(\boldsymbol{u}_{n+1}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{u}_{n-1}(\boldsymbol{s}), \cdots, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{s} \right) \quad (19)$$

と表すことができる．この式は第 n ステップで目的関数が $\boldsymbol{u}_{n+1}$ のみならず過去の履歴によって決まることを表している．こうした経路依存問題のための微分法について，設計変数の変分 δs_j に起因する式 (19) の変分を次のように表す．

$$\delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{u}_{n+1}} \delta \boldsymbol{u}_{n+1} + \delta^* \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (20)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \delta^* \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &\equiv \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{u}_n} \delta \boldsymbol{u}_n + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{u}_{n-1}} \delta \boldsymbol{u}_{n-1} \\ &+ \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{u}_1} \delta \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial s_j} \delta s_j \\ &\equiv \frac{\mathrm{d}^* \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\mathrm{d} s_j} \delta s_j \end{aligned} \quad (21)$$

ここで，$\delta^* \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ は，$\boldsymbol{u}_{n+1}$ のみを固定し，他の全変数の変分を考慮した $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ の変分 (条件付き変分) であり，$\mathrm{d}^* \boldsymbol{\sigma}_{n+1} / \mathrm{d} s_j$

は同じく条件付き微分を表す．なお以降では簡単のため $\mathrm{d}^*/\mathrm{d}s_j$ を $\nabla^*_{s_j}$ と表記する．

4.3 応力感度の導出

ここでは，時刻 n から現時刻 $n+1$ までの増分をとるとき，時刻 n において既知である諸量を用いて，現時刻 $n+1$ の応力感度 $\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ を求める方法を記述する．この手法において，求めた時刻 $n+1$ における応力感度および関連する諸量の設計変数に対する勾配を次の増分ステップにおける既知量として用いることで，その時点までの履歴の影響を考慮しながら応力感度を更新することができる．この際，前述した条件付き微分を用いて設計変数に対する勾配を求めるものとし，また，初期の状態ではそれぞれの勾配を 0 とする．なお，本節で紹介される個々の変数については付録で詳細に記しているため，それを参照されたい．

まず，現時刻 $n+1$ における最終応力を偏差成分と体積成分に分解し，

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} + p^{(\mathrm{F})}_{n+1} : \boldsymbol{I} \tag{22}$$

さらに，両辺の $\nabla^*_{s_j}$ をとると以下のようになる．

$$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} + \nabla^*_{s_j}p^{(\mathrm{F})}_{n+1} : \boldsymbol{I} \tag{23}$$

ここで，p は静水圧，$\boldsymbol{I}$ は 2 階の恒等テンソルである．以下では，式 (23) 右辺の 2 つの微分項を別々に導出する．最初に，$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を求めるために付録に示したいくつかの関係式を参照する．

まず，最終相当応力 $\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ について，式 (62) より

$$\Delta\gamma = \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}} \tag{24}$$

と置け，これを式 (68) に代入して整理すると，偏差応力についての試行応力と最終応力の関係式は

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{1}{1+2G\Delta\gamma}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{25}$$

と表すことができる．ここで，式 (25) の $\nabla^*_{s_j}$ をとると，以下のようになる．

$$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}}{1+2G\Delta\gamma} - \frac{2G\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma) + 2\Delta\gamma\,\nabla^*_{s_j}G}{(1+2G\Delta\gamma)^2}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{26}$$

これより，$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ および $\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)$，$\nabla^*_{s_j}G$ が求まればよいことがわかる．$\nabla^*_{s_j}G$ については，式 (2) の弾性係数テンソルの成分であるので容易に求まる．$\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)$ については，式 (24) の $\nabla^*_{s_j}$ をとると，

$$\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma) = \frac{3}{2}\left(\frac{\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}} - \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\,\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}{\left(\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}\right)^2}\right) \tag{27}$$

となり，$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ および $\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が必要となる．よって，以下では $\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ と $\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$，および前述の $\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ を含めた 3 つの微分項を求めるための誘導を行う．

まず，リターンマッピングアルゴリズムに従って，試行応力および最終応力についての基本式を導入する．式 (64) を偏差応力について表すと次式となる．

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_n + 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{28}$$

次に，式 (59) より，試行応力について次式を得る．

$$\left(\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \tag{29}$$

また，式 (71) は設計変数 $\boldsymbol{s}$ に依存するためそれを加味して以下のように書き改める．

$$\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}, \boldsymbol{s}\right) \tag{30}$$

また，式 (70) より，試行応力と最終応力の関係式として以下を得る．

$$\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - 3G\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{31}$$

これら式 (28)〜(31) について $\nabla^*_{s_j}$ をとると，それぞれ以下の式を得る．

$$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'_n + 2\left(\nabla^*_{s_j}G\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{32}$$

$$\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{1}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}}\left(\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} : \nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \tag{33}$$

$$\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{\partial k}{\partial\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}}\left\{\nabla^*_{s_j}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_n + \nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\right\} + \frac{\partial k}{\partial s_j} \tag{34}$$

$$\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - 3\left(\nabla^*_{s_j}G\right)\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - 3G\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{35}$$

ただし，ここでは次式を用いた．

$${}^{t'}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = {}^{t}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{36}$$

なお，式 (32) を導くにあたっては，$\nabla^*_{s_j}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}') = 0$ とし，局所的な陰的項を消去していることに注意されたい．ここで，式 (33) に式 (32) を代入することで

$$\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{1}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}}\left[\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} : \left\{\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'_n + 2\left(\nabla^*_{s_j}G\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}'\right\}\right] \tag{37}$$

が得られ，さらに式 (35) に式 (34) を代入し，$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ について整理することで

$$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \frac{\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - \dfrac{\partial k}{\partial\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}}\nabla^*_{s_j}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_n - \dfrac{\partial k}{\partial s_j} - 3\left(\nabla^*_{s_j}G\right)\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\dfrac{\partial k}{\partial\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}} + 3G} \tag{38}$$

が得られる．これにより，$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ が既知量を用いて求まることになる．よって，式 (37), (38) を式 (35) に代入することで $\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を得ることができる．

最後に，$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ は式 (64) の $\nabla^*_{s_j}$ をとった式

$$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}_n + \nabla^*_{s_j}\mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n) \tag{39}$$

によって求められる．ただし，ここでも $\nabla^*_{s_j}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ とおいて局所的な陰的項を消去している．以上から，$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ および $\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$，$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ がすべて求められたので，式 (26) で示される最終の偏差応力感度 $\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が求まる．

一方，静水圧は $p^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \dfrac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}\right)$ であるが，式 (66) より，以下の関係が成り立つため，

$$\nabla^*_{s_j}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}\right) = \nabla^*_{s_j}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) = \mathrm{tr}\left(\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \tag{40}$$

静水圧の感度は次式で表すことができる．

$$\nabla^*_{s_j} p^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \tag{41}$$

この式に，式 (39) を代入することで静水圧の感度が求まる．

以上より，ここで求めた $\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ および $\nabla^*_{s_j} p^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を式 (23) に代入することで最終的な応力感度 $\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が求まり，それを式 (14) に用いることで，陰的積分により求められた，“つり合い方程式を満たす応力” と整合する目的関数の感度が求められる．

なお，本論文のように平面応力状態を仮定する場合は，平面応力のためのリターンマッピングアルゴリズムに即して以下のように応力感度を導出する．まず，式 (78) の $\nabla^*_{s_j}$ をとると

$$\frac{1}{2}\nabla^*_{s_j}\xi - \frac{2}{3}k\cdot\left(\frac{\partial k}{\partial \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}}\nabla^*_{s_j}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} + \frac{\partial k}{\partial s_j}\right) = 0 \tag{42}$$

となる．ここで，$\nabla^*_{s_j}\xi$，$\nabla^*_{s_j}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ はそれぞれ式 (84)，(79) の $\nabla^*_{s_j}$ をとることで以下のように表せる．

$$\begin{aligned}
\nabla^*_{s_j}\xi \;=\;& \frac{\left(\sigma^{(\mathrm{T})}_{11}+\sigma^{(\mathrm{T})}_{22}\right)\left(\nabla^*_{s_j}\sigma^{(\mathrm{T})}_{11}+\nabla^*_{s_j}\sigma^{(\mathrm{T})}_{22}\right)}{3\left[1+E\Delta\gamma/\{3(1-\nu)\}\right]^2} \\
-\;& \frac{\left(\sigma^{(\mathrm{T})}_{11}+\sigma^{(\mathrm{T})}_{22}\right)^2\left\{\left(\nabla^*_{s_j}E\right)\Delta\gamma + E\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)\right\}}{9(1-\nu)\left[1+E\Delta\gamma/\{3(1-\nu)\}\right]^3} \\
+\;& \frac{\left(\sigma^{(\mathrm{T})}_{22}-\sigma^{(\mathrm{T})}_{11}\right)\left(\nabla^*_{s_j}\sigma^{(\mathrm{T})}_{22}-\nabla^*_{s_j}\sigma^{(\mathrm{T})}_{11}\right)+4\sigma^{(\mathrm{T})}_{12}\left(\nabla^*_{s_j}\sigma^{(\mathrm{T})}_{12}\right)}{(1+2G\Delta\gamma)^2} \\
-\;& \frac{2\left\{\left(\sigma^{(\mathrm{T})}_{22}-\sigma^{(\mathrm{T})}_{11}\right)^2+4\left(\sigma^{(\mathrm{T})}_{12}\right)^2\right\}\left\{\left(\nabla^*_{s_j}G\right)\Delta\gamma + G\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)\right\}}{(1+2G\Delta\gamma)^3}
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\nabla^*_{s_j}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \nabla^*_{s_j}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \sqrt{\frac{2}{3}}\left\{\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)\sqrt{\xi} + \frac{\Delta\gamma\left(\nabla^*_{s_j}\xi\right)}{2\sqrt{\xi}}\right\} \tag{44}$$

また，$\nabla^*_{s_j}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ は局所的な陰的項を $\nabla^*_{s_j}(\Delta\hat{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ として消去すれば

$$\nabla^*_{s_j}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \nabla^*_{s_j}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n} + \left(\nabla^*_{s_j}\mathrm{C}\right)\Delta\hat{\varepsilon} \tag{45}$$

として陽的に求められる．よって，式 (42)，(43)，(44) を合わせて唯一の未知数 $\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)$ について解くことができる．さらに，式 (74)，(85)，(86) の $\nabla^*_{s_j}$ をとると

$$\nabla^*_{s_j}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \left(\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{A}\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{T})}_{n+1} + \boldsymbol{A}\left(\nabla^*_{s_j}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \tag{46}$$

$$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\nabla^*_{s_j}A^*_{11}+\nabla^*_{s_j}A^*_{22}\right) & \frac{1}{2}\left(\nabla^*_{s_j}A^*_{11}-\nabla^*_{s_j}A^*_{22}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\nabla^*_{s_j}A^*_{11}-\nabla^*_{s_j}A^*_{22}\right) & \frac{1}{2}\left(\nabla^*_{s_j}A^*_{11}+\nabla^*_{s_j}A^*_{22}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \nabla^*_{s_j}A^*_{33} \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^*_{s_j}A^*_{11} &= -\frac{3(1-\nu)\left\{\left(\nabla^*_{s_j}E\right)\Delta\gamma + E\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)\right\}}{\{3(1-\nu)+E\Delta\gamma\}^2}, \\
\nabla^*_{s_j}A^*_{22} &= -\frac{2\left\{\left(\nabla^*_{s_j}G\right)\Delta\gamma + G\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)\right\}}{(1+2G\Delta\gamma)^2}, \\
\nabla^*_{s_j}A^*_{33} &= \nabla^*_{s_j}A^*_{22}
\end{aligned} \tag{48}$$

Table 1　Material parameters for verification of sensitivities

	material 1	material 2
Young’s modulus E	30(MPa)	1960(MPa)
Poisson’s ratio ν	0.3	0.3
initial yielding stress σ_{y}	1.0(MPa)	2.9(MPa)
hardening modulus E^{h}	10(MPa)	900(MPa)

となるので，ここに求めた $\nabla^*_{s_j}(\Delta\gamma)$ を代入することで応力感度 $\nabla^*_{s_j}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が得られる．

5. 導出された感度の精度検証

5.1　検証方法

本節では，4.3 節で定式化した目的関数の感度の精度について比較検証を行う．比較の対象は次式のような有限差分法 (finite difference method; FDM) によって求められる感度である．

$$\nabla_{s_j} f = \frac{f(\boldsymbol{s}+\Delta\tilde{\boldsymbol{s}}) - f(\boldsymbol{s})}{\Delta s_j} \quad ; \quad \Delta\tilde{s}_i = \delta_{ij}\Delta s_j \tag{49}$$

ここで，δ_{ij} はクロニッカーデルタ，Δs_j は設計変数の僅かな変化，$\Delta\tilde{\boldsymbol{s}}$ は，j 番目の成分のみ Δs_j を持ち，それ以外の成分はゼロを有するベクトルである．

承知のとおり，FDM による感度解析は数値計算量が膨大になってしまうため実用性に欠けるが，対象とする最適化問題毎の定式化が不要であり，離散化による近似誤差を含むもののどのような最適化問題にも比較的精度のよい感度を与えることから，ここでは感度の参照値として用いている．

以降の検証において，全荷重ステップを経過した（制御点変位量が $\hat{\boldsymbol{u}}$ となる）時点での目的関数の感度を比較する．また，設計変数の変動量 Δs_j は 10^{-7} と設定したが，これは差分近似の精度を確保する上で十分に小さな値であり，さらに小さく設定しても精度の向上がみられないことを確認している．

なお，以下において，提案手法によって求められた感度を “解析的手法による感度” と呼び，有限差分法による “感度” と区別する．

5.2　使用モデルおよび荷重条件

ここでは，解析的手法による感度の精度を検証するために用いるモデルおよび荷重条件について記述する．前述したとおり，有限差分法による感度解析は数値計算量が膨大になるため，ここでは設計変数，すなわち用いる要素の数を少なめに設定する．具体的には，Fig.2 に示す四辺形 8 節点要素 200 個からなる有限要素モデルを使用し，平面応力状態を仮定する．

なお，それぞれの要素には図中に示すように要素番号がふられている．これは，Fig.2 を見やすくするため

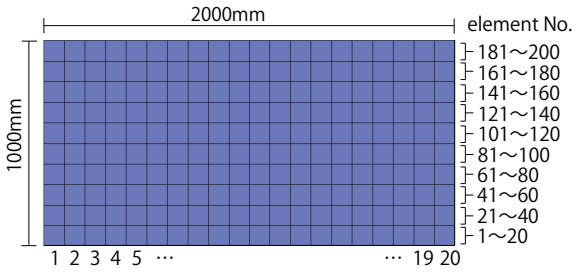

Fig. 2　Finite element mesh used for verification of sensitivity

に敢えてリナンバリングしたものであり，有限要素解析で用いた実際の要素番号とは無関係である．また，2 相からなる複合材料を想定し，構成材料のパラメータは Table1 に示すとおりである．ちなみに塑性材料 1 はゴム，塑性材料 2 はポリプロピレンに相当し，塑性材料 2 についていえば，およそ 0.1～0.2%のひずみで降伏点に達し，塑性変形を生じることになる．この共通した材料および領域に対し，それぞれが異なる典型的な変形を表すように，以下の異なる 3 つの拘束・荷重条件を設定する．

(1) case1: 引張り

引張り変形のための条件を Fig.3(a) に示す．構造左端の境界は完全固定とし，右端の境界については境界上にある全節点の x 方向変位それぞれが同値となるように連成制御している．荷重は図中に示す範囲で，右方向に t_0 = 1.0N/mm の等分布荷重を作用させた．変位制御法の制御点は右上端の節点にとし，変位増分の大きさを 1 mm，全荷重ステップ数を n = 100（総変位量 $\hat{u}$ = 100mm）とした．

(2) case2: せん断曲げ I

せん断曲げ変形のための条件を Fig.3(b) に示す．構造左端の境界は完全固定とし，右端については境界上の全節点の x 方向変位は固定，y 方向変位は同値となるように連成させている．荷重は図中に示す範囲で，下方向に t_0 = 1.0N/mm の等分布荷重を作用させた．変位制御法の制御点は右上端の節点であり，変位増分の大きさを 1 mm，全荷重ステップ数を n = 100（総変位量 $\hat{u}$ = 100mm）とした．

(3) case3: せん断曲げ II

ここではは，もうひとつのせん断曲げ変形としての，Fig.3(c) に示す条件を設定した．この解析モデルはいわゆる三点曲げを表している．下方向に t_0 = 1.0N/mm の等分布荷重を作用させ，荷重が作用する境界上の全節点の y 方向変位は上記の 2 ケースと同様に連成させてある．変位制御法の制御点は右上端の節点であり，変位増分の大きさを 1 mm，全荷重ステップ数を n = 100（総変位量 $\hat{u}$ = 100mm）とした．

5.3　検証結果

それぞれの荷重条件下において求められた，有限差分法と解析的手法による感度を比較する．引張りおよびせん断曲げ（I, II）の 3 ケースについての結果をそれぞれ Fig.4，Fig.5，Fig.6 に示す．それぞれの図は横軸に要素番号，縦軸に最適化ステップ初回の感度をとったもので，各要素において求められた感度がどれほど正しい値に沿っているかを表している．

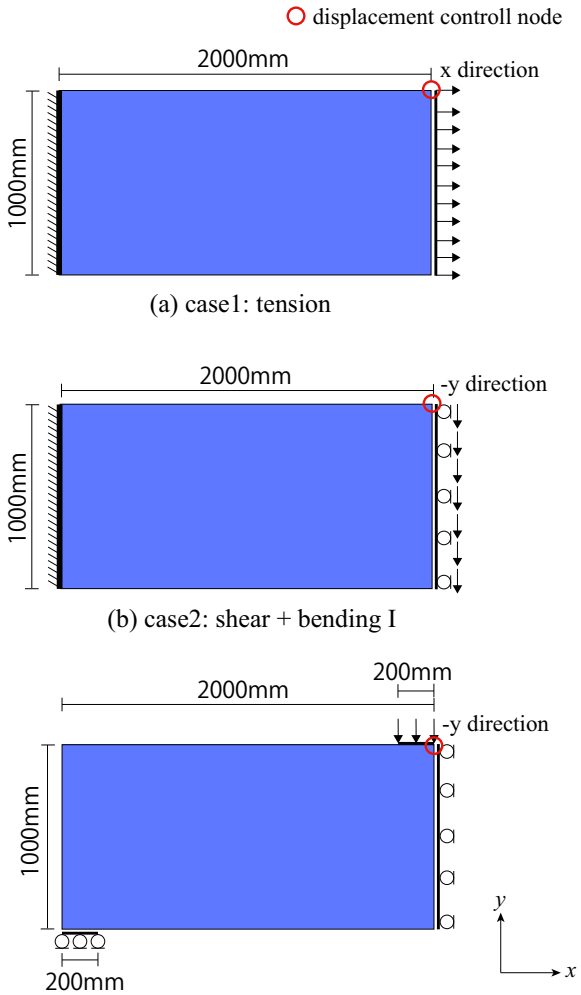

Fig. 3　Boundary conditions

これらの図より，すべてのケースにおいて，有限差分法および解析的手法による感度が示す 2 本の曲線がおおよそ一致していることがわかる．ここで，感度が強く出ている要素には，目的関数が構造のダクティリティであることから，それに寄与するべく著しい塑性変形を生じているはずである．そのような要素においてはわずかに感度の乖離がみられるものの，誤差は最大でも 10%に満たない程度にとどまっている．これは，長辺が 2000 mm の長方形領域に変位制御点に $\hat{u}$ = 100 mm もの変位，大まかにいえば全体で 5%ものひずみを生じていることを考えると，非常に小さな誤差であるといえる．

以上の結果から，提案手法による感度解析は高い精度を有するといえる．また，この結果をもって，以降

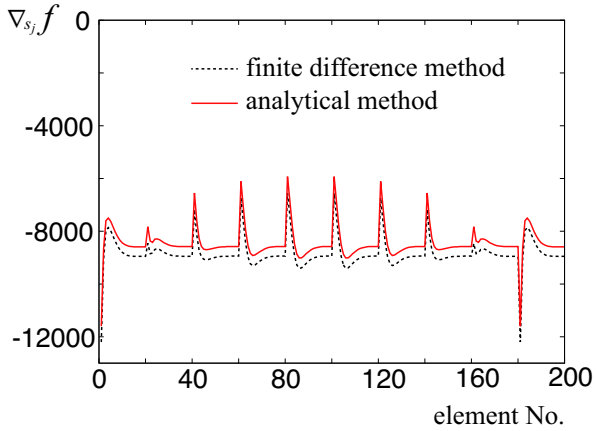

Fig. 4　Accuracy of sensitivities for case1 (tension)

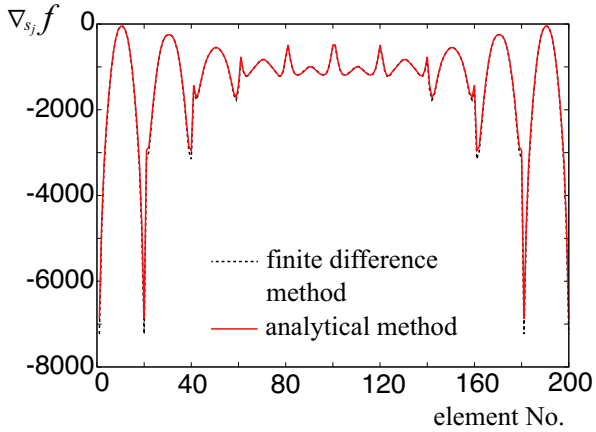

Fig. 5　Accuracy of sensitivities for case2 (shear+bending I)

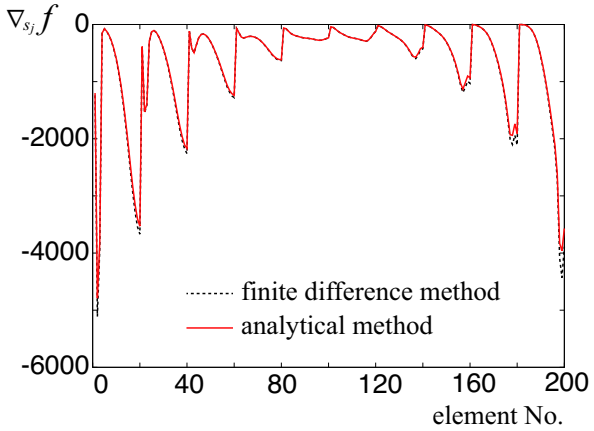

Fig. 6　Accuracy of sensitivities for case3 (shear+bending II)

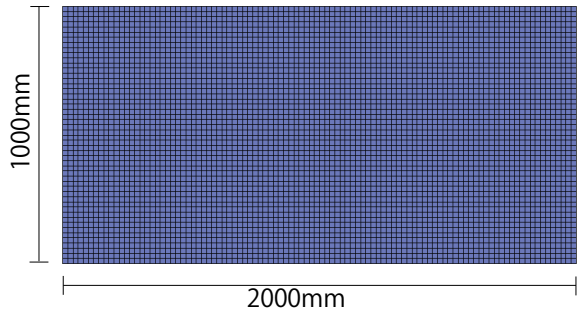

Fig. 7　Finite element mesh used for numerical calculation

において紹介する最適化計算例において，得られた構造のトポロジーの妥当性を裏付けるものとする．

6. 最適化計算例

6.1　使用モデルおよび解析条件

本節では，いくつかの最適化計算例を用いて，本手法で提案する非線形材料を考慮した構造最適化の性能と妥当性について検証し，塑性変形の影響が最終的なトポロジーにどのように反映されるかを考察する．以下の数値計算例においては，共通した有限要素モデルおよび荷重条件を用いる．計算に用いた有限要素メッシュを Fig.7 に示すが，これは滑らかなトポロジーを得るために要素数を 5000 に拡張しているだけで，その他の条件は 5.2 節で用いた 200 要素のものと同様である．また，荷重条件についても 5.2 節と同様である．なお，ここでは具体的な複合材料のトポロジー最適化の検証を行う前に，単一材料からなる多孔質材料についても同様の最適化計算例を実施し，その結果を示すことにする．これは，複合材料の場合，弾性領域であっても構成材料の材料パラメータの大きさによっては，多孔質材料の場合と大きく異なる最適化トポロジーが得られることが知られており [13]，複合材料の最適化結果のみからでは提案手法の妥当性を観念的に理解しづらくなることを配慮したものである．

6.2　多孔質材料を用いた場合の最適化計算例

ここでは，まず多孔質材料において構造が塑性変形を生じるとき，それによって最終的なトポロジーがどのように変化するかを確かめる．弾性および塑性化する材料それぞれの材料パラメータを Table2 に示すが，これは 5.2 節で示した塑性材料 2 と同様のもので，弾性材料としたものについては，降伏応力を十分に大きく設定することで材料の降伏が起こらないようにして設

Table 2　Material parameters for case 1

	elastic	plastic
Young's modulus E	1960 (MPa)	1960(MPa)
Poisson's ratio ν	0.3	0.3
initial yielding stress σ_y	∞(MPa)	2.9(MPa)
hardening modulus E^h	∞(MPa)	900(MPa)

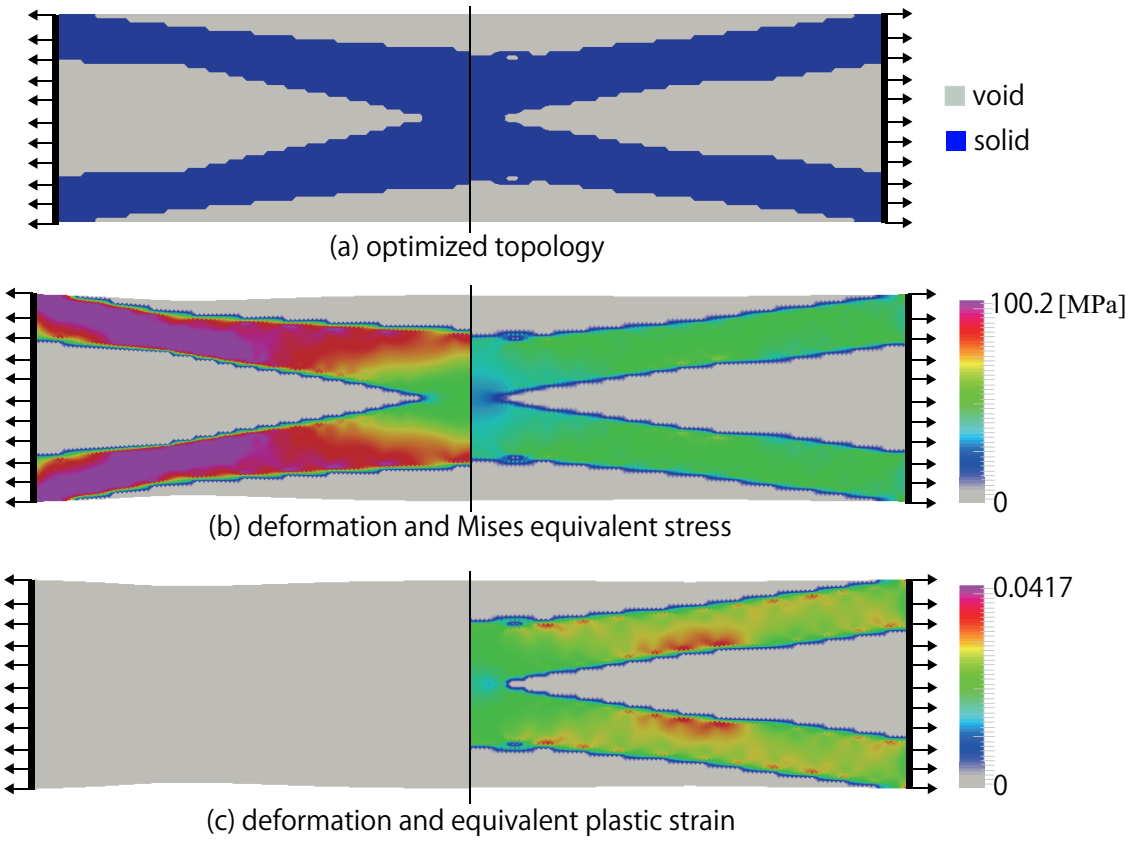

Fig. 8 Optimization results for case 1 (tension): (left) elastic, (right) plastic

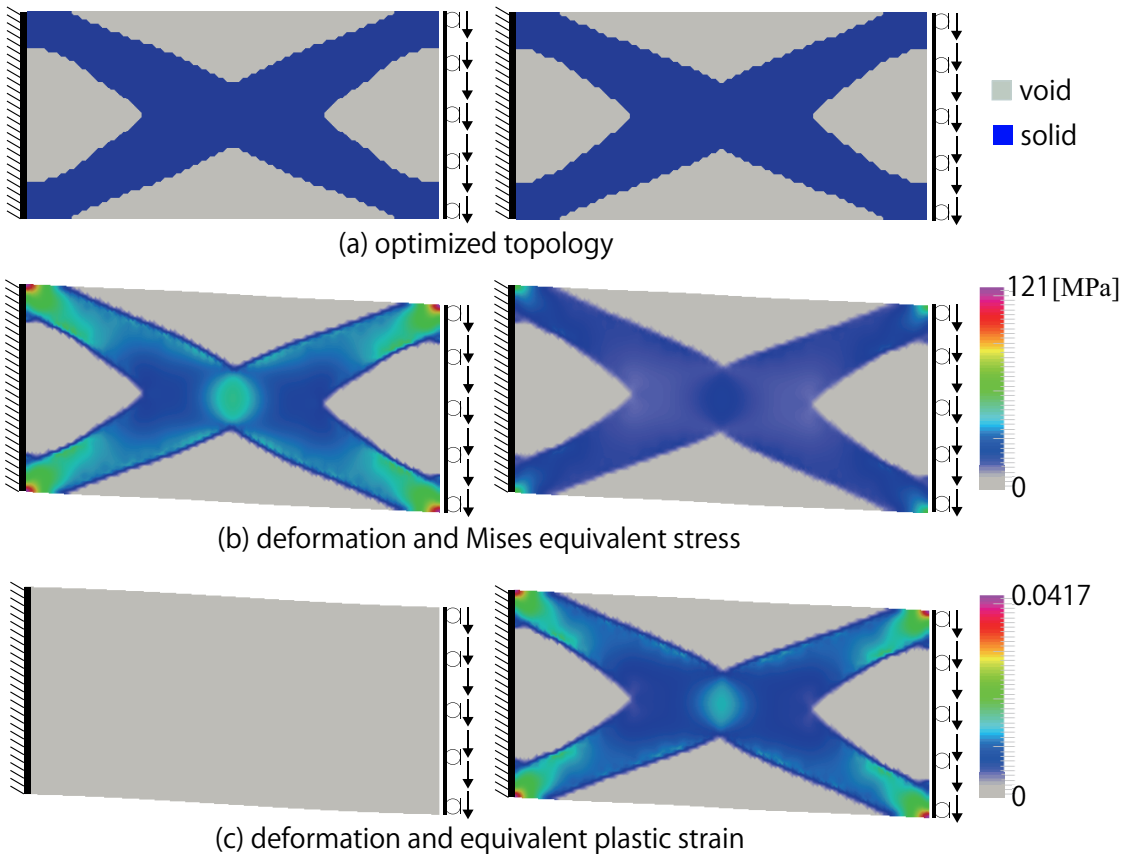

Fig. 9 Optimization results for case 2 (shear+bending I): (left) elastic, (right) plastic

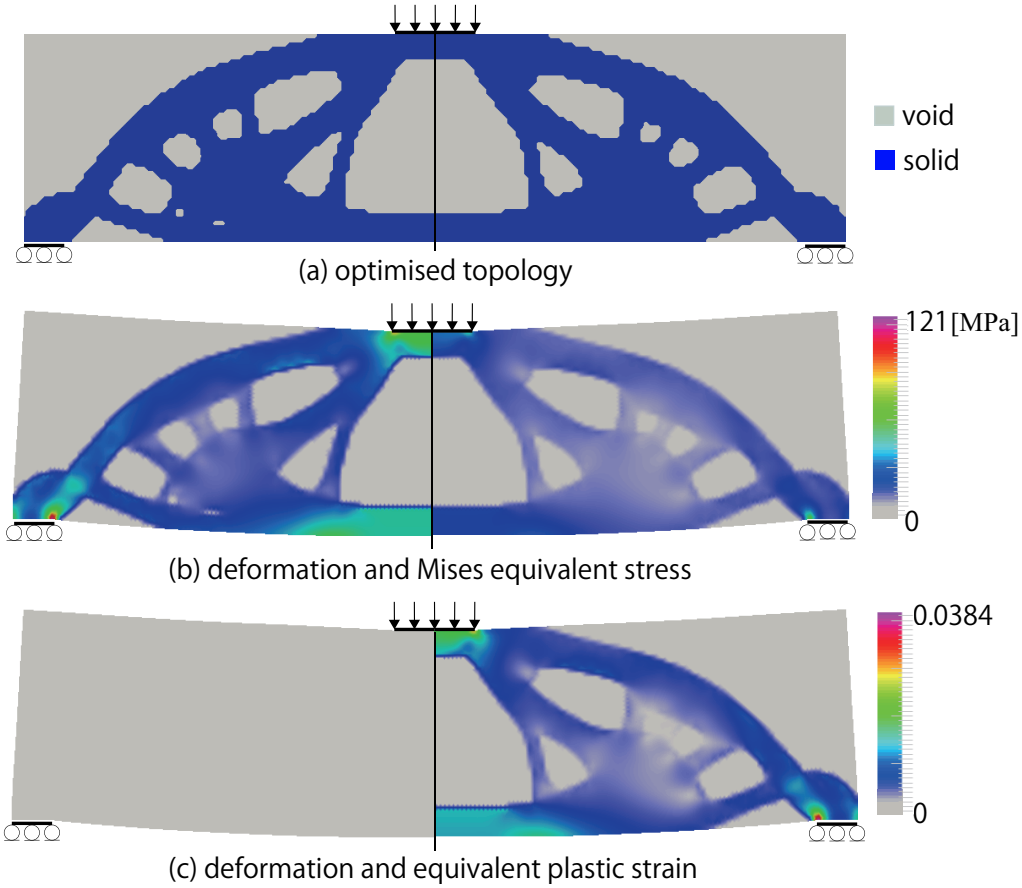

Fig. 10 Optimization results for case 3 (shear+bending II): (left) elastic, (right) plastic

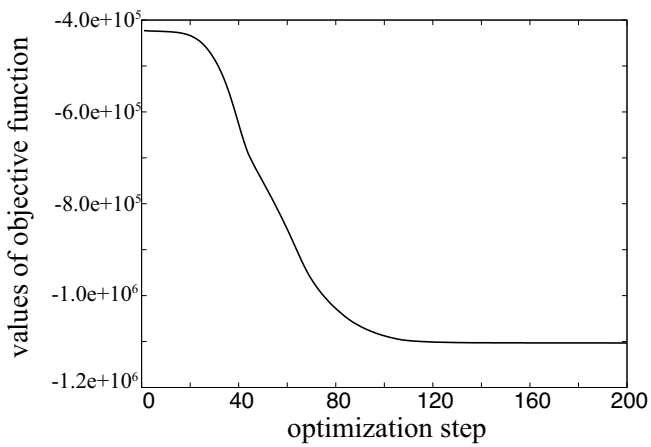

Fig. 11 Changes in value of objective function

Table 3　Material parameters for case 2

	material 1	material 2
Young's modulus E	210(GPa)	72(GPa)
Poisson's ratio ν	0.3	0.3
initial yielding stress σ_y	100(MPa)	400(MPa)
hardening modulus E^h	505(MPa)	1600(MPa)

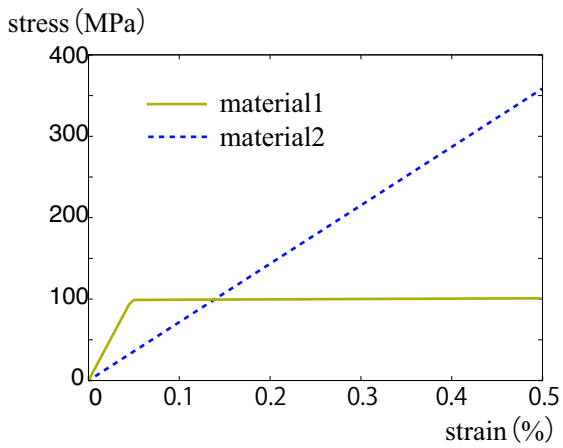

Fig. 12　Stress-strain curves

定した．ちなみに，弾性材料を用いる場合，ダクティリティ最大化は剛性最大化と同じ意味を持つことになる．引張・せん断曲げ（I, II）の 3 条件についての結果を，それぞれ Fig.8，Fig.9，Fig.10 に示す．また，Fig.11 は参考として，case1 の塑性材料を用いた場合のの目的関数値の推移を示したものである．なお，目的関数値の推移については他のケースでも同様の結果が得られており，紙面のスペースの関係上，ここでは省略した．

これらの結果を考察すると，それぞれの相当塑性ひずみのコンター図より，塑性材料には固体材料が配置された要素に沿って大きな塑性ひずみが生じており，また，相当応力のコンター図より，弾性材料の場合と比べて塑性材料において応力の増大が抑えられていることがわかる．よって，同じ剛性を持ちながら塑性材料だけが確かに降伏しており，その変形の大部分は塑性変形によるものであるといえる．その上で，すべての荷重条件下において，弾性材料を用いた場合と塑性材料を用いた場合とで最適化後のトポロジーはほとんど変わらない結果となった．これは，どちらの材料を用いたとしても，応力が大きくなる要素に大きなひずみが生じ，すなわち感度が強く出るという大まかな傾向が同じであるため，結局は似たようなトポロジーが最適解として得られたと考えられる．

このような結果を確認できたことは高い精度を保証した数理的アプローチに依るところが大きく，本研究の確かな成果といえる．

6.3　複合材料を用いた場合の最適化計算例

ここでは，複合材料の構成材料がより現実的でかつ複雑な非線形性を有するような構造設計問題を対象とする．Table3 は使用材料のパラメータを示しており，これは Fig.12 に示すように，それぞれの構成材料の応力-ひずみ曲線が交差するような複合材料を意図している．ちなみに，塑性材料 1 は低降伏点鋼 (JFE-LY100)，塑性材料 2 は超々ジュラルミン (A7075) を参考に設定した．このような材料においては，目的関数に寄与する材料がどちらであるかは一様に定まらず，各要素における感度はひずみ量に強く依存することになる．ゆえに，変位制御点に与える総変位量によって塑性変形の程度が変わると，それに伴い最適なトポロジーも大きく異なることが予想され．これは本手法が経路依存性を正しく評価できるものであるかを検証する本質的な問題であるといえる．

これを踏まえて，変位制御点の総変位量を $\hat{u}$ = 1.0mm, $\hat{u}$ = 100mm の 2 通りに設定して，ほぼ弾性変形のみを生じる場合と塑性変形が卓越する場合の最適化結果を比較する．ちなみに，総変位量の 100mm については 5.2 節および前項の多孔質材料の場合と同じ設定である．ここでは，引張りおよびせん断曲げ I の 2 ケースについての結果を，それぞれ Fig.13，Fig.14 に示す．

まず，引張り変形下における結果について考察すると，Fig.13(a) より，制御点変位量の大小，すなわち構造における塑性変形の程度によって，わずかに形状を違えながらも，きれいに反転するようなトポロジーが得られていることがわかる．これを力学的に解釈すると，構造がそれほど変形していない場合は，初期剛性の高い塑性材料 1 が構造の剛性最大化に向けての主要な材料として役割を果たし，逆に変形が大きくなるにつれ，粘り強い塑性材料 2 がダクティリティ最大化に向けて重要になってくると捉えられる．ゆえにこの結果については，そういった構成材料の応力-ひずみ曲線が交差するような複合材料の特性を反映しており，力学的に妥当な最適化結果であるといえる．また，この結果の妥当性は，同図 (b) の相当応力図より，それぞれの変位量において主要な材料が，そうでない材料より大きな応力を受け持っていることからも確かめられる．

次に，せん断曲げ I について，Fig.14(a) より，引張り変形の場合と同様に主要な材料が反転する傾向を示しながらも，制御点変位量 100 mm において複雑なトポロジーが得られる結果となった．せん断曲げ I の場合，引張変形において各要素が一様に大きく変形するのとは異なり，各要素のひずみは設計領域内で大小に偏って分布することになる．つまり，大きく塑性変形する要素あるいはほとんどしない要素については，どちらの材料が有効であるかは明解であるが，どちらともつかない半端なひずみ量を示す要素を含む領域については，非常に繊細な構造挙動を考慮してそのトポロジーが決定されることになる．ゆえに，Fig.14(a) における一見複雑なトポロジーは，直感的に理解することが困難な力学問題にあたり，本手法を用いることで定量的

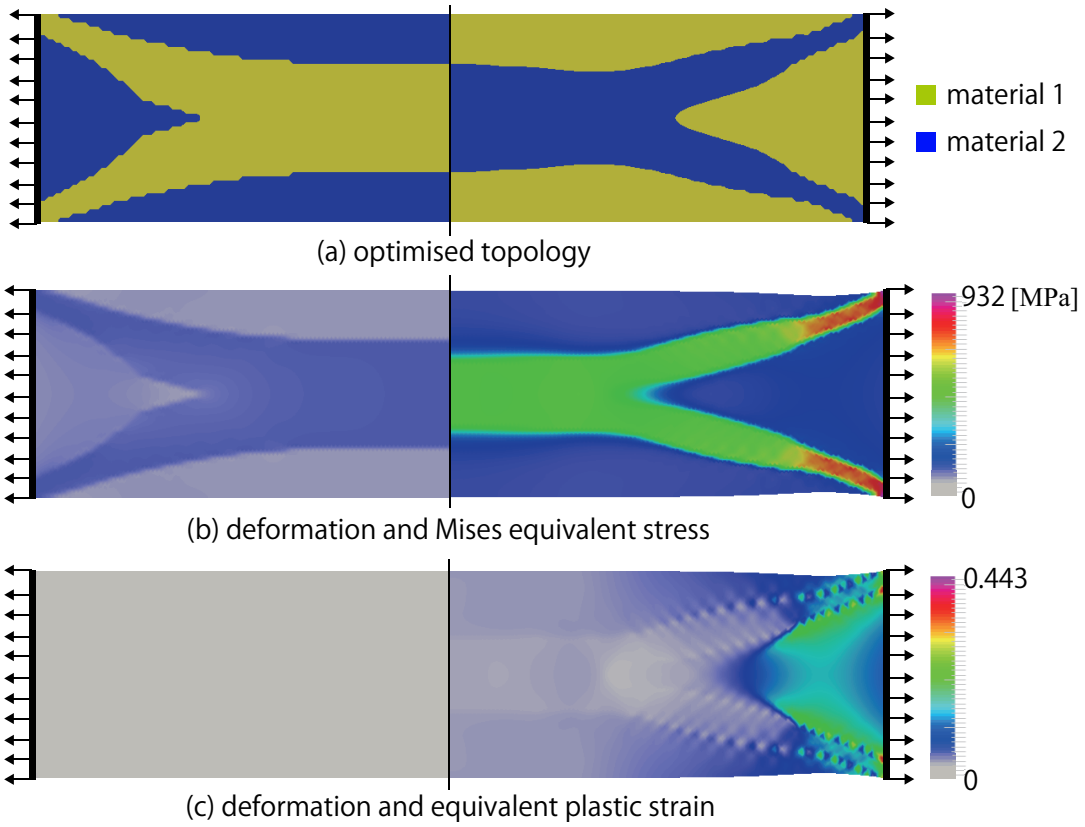

Fig. 13　Optimization results for case1 (tension) : (left) $\hat{u}$ = 1mm, (right) $\hat{u}$ = 100mm

に一定の最適解を得た結果であるといえる．ちなみにこの計算において，部分的に完全な‘0-1’の収束が得られず，グレースケールを残す形でトポロジーが示された．これは前述の理由で該当部分における感度の差異が極めて付きづらかったためと考えられ，複雑な問題設定の上で避けられない結果であったといえる．このようにして出たグレースケールを理論的に認めるためには，グレースケールの材料パラメータを均質化法などにより物理的に保証できるものにするなどの方法が考えられるが，この点については今後の課題としたい．

以上をまとめると，変形量の違いによって最適化トポロジーが大きく異なるような問題設定を行い，そうした問題背景に整合した結果が得られたことから，本手法において塑性変形の経路依存性が正しく考慮することができていると考えられる．

7. 結論

本研究は，構造のダクティリティを目的関数とし，複合材料の材料非線形性を考慮したトポロジー最適化手法の開発を行った．ここでは，von Mises の降伏条件を用いた等方性弾塑性材料モデルを対象に，まずは多相材料最適化の概念を弾塑性材料モデルに拡張することで材料個々のパラメータを正則化した．次に，複合材料の弾塑性挙動を考慮した感度解析手法として，リターンマッピングアルゴリズムに整合した応力感度を取り入れ，目的関数の設計変数に対する解析的感度式を提案した．最後に本研究で提案した感度と有限差分法によるものとの比較検証を行い，その精度が十分に保証されることを確認した上で，幾つかの最適化数値計算例を実施した．以下にその計算例から得られた知見を挙げておく．

- 本研究で提案した手法によって，いずれの最適化計算例においても力学的に理にかなったトポロジーが得られることが示された．特に材料の塑性化が卓越する場合においても良好な結果を示しており，本手法が経路依存性を考慮できる有用な最適化手法であることが確認された．
- 本研究で導出した感度は，有限差分法による感度とほぼ一致する高精度なものであることが示された．これにより，弾塑性材料を扱う最適化問題において感度の精度を担保するためには，リターンマッピングによる応力積分に整合た応力感度が必要不可欠であることが例証された．
- 本手法を導入することで，個々の構成材料の力学的特性を活かした複合材料および複合構造の設計が可能になるものと期待できる．一方で，最適化計算例では局所的にグレースケールを残す形のトポロジーが得られた．これは，どちらの材料が目的関数の向上により多く寄与するかが明瞭でない要素で生じており，応力–ひずみ曲線が交差する構成材料を用いる場合に発生し得る．

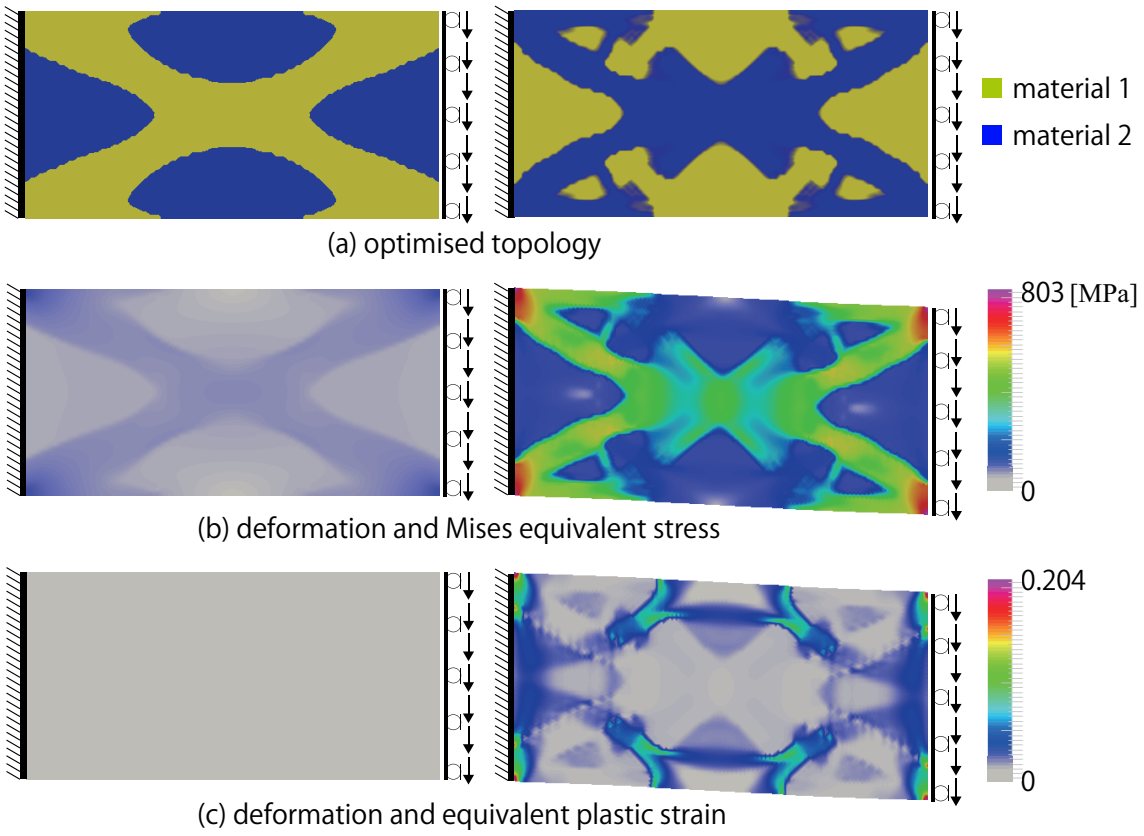

Fig. 14　Optimization results for case2 (shear+bending I): (left) $\hat{u}$ = 1mm, (right) $\hat{u}$ = 100mm

しかし，このグレースケールが得られる現象は当該最適化問題の設定からすれば妥当な結果であるといえる．

最後に，前述のとおり本研究では異種材料間の界面挙動を考慮していないが，一般の複合材料の力学挙動は界面の変形・破壊が支配的になる．したがって，実際の複合材料の設計のためには界面挙動を考慮したトポロジー最適化手法が求められるが，これは今後の課題としたい．

付録 A：等方性弾塑性材料モデル

本研究で用いた等方性弾塑性材料モデルおよびリターンマッピングアルゴリズム, consistent 接線係数は，既によく知れたものであり，敢えてそれらを記述する必要性はないが，本研究で定式化した解析的感度の導出において，それらの多くの関係式が本文で引用されている．そのため，付録としてそれらについて概説しておく．

まず，弾塑性変形において，全ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は，弾性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ と塑性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ の和として以下のように表される．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{50}$$

また，塑性変形中も Hooke 則が成立すると仮定すると，以下の式が得られる．

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{51}$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ はコーシー応力テンソル，$\mathbb{C}$ は弾性剛性テンソルである．なお，ここでは便宜上速度形で表している．von Mises の降伏条件を用いて，降伏応力が相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ のみに依存して変化すると仮定すると，降伏関数 Φ は硬化関数 $k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ を用いて以下のように与えられる．

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3}k^2(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{52}$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}'$ は偏差応力テンソル，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ は相当塑性ひずみである．なお，後述するリターンマッピングの手法を用いる際に都合がよいため，ここでは降伏関数を 2 乗した形式で与えている．また，塑性材料モデルの硬化則は実材料に合わせて様々に設定できるが，本研究においては簡易な速度非依存の等方線形硬化則を仮定し，硬化関数 $k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ を以下のように与える．

$$k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \sigma_{\mathrm{y}} + E^{\mathrm{h}}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{53}$$

ここで σ_{y} は初期降伏応力，E^{h} は加工硬化係数である．なお，ここでは計算に用いるための具体的な硬化則を示したが，4.3 節の感度解析においては，硬化関数が $k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ で表されるような一般的な硬化則について記述するものとする．ただし，移動硬化は考慮していない．式 (52) より，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}' \tag{54}$$

となることから，塑性流れの方向が偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ の方向と一致することがわかる．ゆえに，塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ を，$\dot{\gamma}$ を係数として以下のように表すことができる．

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma}\boldsymbol{\sigma}' \tag{55}$$

これは流れ理論における関連流れ則 (associated flow rule) であり，以降 γ を塑性乗数と呼称する．また，塑性ひずみ仕事率 $\dot{W}^{\mathrm{p}}$ について，以下の関係が成り立つと仮定する．

$$\dot{W}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \equiv \bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{56}$$

ここで $\bar{\sigma}$ は相当応力，$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ は相当塑性ひずみ速度である．式 (55) の両辺と $\boldsymbol{\sigma}$ の内積をとり，式 (56) の関係を用いて変形すると，以下の式を得る．

$$\dot{\gamma} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}} \tag{57}$$

なお，変形の際に以下の関係式を用いている．

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}') \tag{58}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}' \tag{59}$$

付録B：リターンマッピングアルゴリズム

弾塑性モデルを用いた増分解析において，時刻 n から $n+1$ までの増分ステップを想定する．なお，下付き添え字 n，$n+1$ はそれぞれの時刻における諸量を表す．式 (51)，(55)，(57) を増分について表すと，

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{60}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \Delta\gamma\,\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} \tag{61}$$

$$\Delta\gamma = \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}_{n+1}} \tag{62}$$

となり，式 (61)，(62) を式 (60) に代入すると次式を得る．

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}_{n+1}}\mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} \tag{63}$$

ここで，時刻 n において既知である項を試行応力として

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{64}$$

とおくと，リターンマッピングにおける試行応力と最終応力の関係式

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}\mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} \tag{65}$$

を得る．ここで右肩添え字 (T)，(F) はそれぞれ試行応力，最終応力を表す．式 (64) は，弾性剛性テンソル $\mathbb{C}$ を用いて時刻 $n+1$ における試行応力を求めることを意味している．式 (65) より

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{\mathrm{n+1}}\right) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{\mathrm{n+1}}\right) \tag{66}$$

であるから，式 (65) はせん断弾性係数 G を用いて，以下のような偏差応力の関係式に書き換えられる．

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} - \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}2G\,\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} \tag{67}$$

これを整理すると

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} + 3G\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{68}$$

となることから，最終偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を試行偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ のスカラー倍で表せることがわかる．さらに，偏差応力のノルムの比はその相当応力の比に等しいことから，

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{69}$$

とおくことができる．つまり，式 (69) は偏差応力空間において試行応力を半径方向に修正することで最終応力を得ることを意味する．式 (68) および式 (69) より，$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ が $\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ と一致するための相当応力に関する条件式

$$\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} + 3G\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{70}$$

を得る．ここで，塑性変形中の相当応力は降伏応力，すなわち硬化関数 $k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}\right)$ に一致するため，

$$\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}\right) \tag{71}$$

とおける．また，時刻 $n+1$ における相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ はその増分 $\Delta\bar{\varepsilon}^{p}$ を用いて

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{72}$$

と表せる．よって，式 (71)，(72) を式 (70) に代入して整理すると

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{3G}\left\{\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right)\right\} \tag{73}$$

となり，未知変数が $\Delta\bar{\varepsilon}^{p}$ だけの方程式に縮約される．これを解くことで $\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ を求めることができるが，材料モデルに非線形硬化則を用いる場合は，Newton-Raphson 法などの反復計算によって求める必要がある．あとは，求めた $\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ を式 (70) に代入することで $\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が求まり，さらに $\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，$\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を式 (62)，(68) にそれぞれ代入することで $\Delta\gamma$，$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が求められる．

一方，平面応力状態を仮定する場合は，応力に拘束が課されるため上記の 3 次元モデルとは別に特殊な定式化が必要となる．よって，応力とひずみの面内成分のみを変数とした塑性モデルを前提に，平面応力のためのリターンマッピングを以下にまとめる．なお，本論文では，Simo and Hueghes[23] の 3.4 節で示されるリターンマッピングアルゴリズムを参考とした．ここでは移動硬化を考慮しない一般的な等方硬化則を想定し，それを行列形式で書き表す．

まず，試行応力と最終応力の関係式は

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = [\boldsymbol{C} + \Delta\gamma\boldsymbol{P}]^{-1}\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{74}$$

となる．ここで，$(\hat{\bullet})$ は面内成分のみで作られるベクトルを意味し，また，弾性剛性行列 $\boldsymbol{C}$ および射影行列 $\boldsymbol{P}$ はそれぞれ以下のように記される．

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{12}\}^{\mathrm{T}} \tag{75}$$

$$\boldsymbol{C} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{76}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{77}$$

また，整合条件式は

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{F})}_{n+1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{F})}_{n+1} - \frac{1}{3}k^2\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}\right) = 0 \tag{78}$$

となり，硬化変数 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ の発展則は

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \Delta\gamma\sqrt{\frac{2}{3}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{F})}_{n+1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{F})}_{n+1}} \tag{79}$$

となる．よって，式 (74)，(78)，(79) は $\Delta\gamma$ についての非線形スカラー方程式として以下のようにまとめられる．

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2}\xi(\Delta\gamma) - \frac{1}{3}k^2\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \Delta\gamma\sqrt{\frac{2}{3}\xi(\Delta\gamma)}\right) = 0 \tag{80}$$

ここで，

$$\xi(\Delta\gamma) = \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\Delta\gamma)\,\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}(\Delta\gamma)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{81}$$

$$\boldsymbol{A}(\Delta\gamma) = [\boldsymbol{C} + \Delta\gamma\boldsymbol{P}]^{-1}\boldsymbol{C} \tag{82}$$

とおいた．あとは，式 (80) を解いて求めた $\Delta\gamma$ を式 (74)，(79) に代入して $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ を求めればよい．

なお，等方性を仮定すると行列 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{C}$ および $\boldsymbol{A}$ は同じ直交行列

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{83}$$

によって対角化でき，これを利用すると式 (81)，(82) は以下のように簡単に表すことができる．

$$\xi(\Delta\gamma) = \frac{\left(\sigma^{(\mathrm{T})}_{11} + \sigma^{(\mathrm{T})}_{22}\right)^2}{6\left\{1 + \dfrac{E\Delta\gamma}{3(1-\nu)}\right\}^2} + \frac{\dfrac{1}{2}\left(\sigma^{(\mathrm{T})}_{22} - \sigma^{(\mathrm{T})}_{11}\right)^2 + 2\left(\sigma^{(\mathrm{T})}_{12}\right)^2}{(1+2G\Delta\gamma)^2} \tag{84}$$

$$\boldsymbol{A}(\Delta\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A^*_{11} + A^*_{22}) & \frac{1}{2}(A^*_{11} - A^*_{22}) & 0 \\ \frac{1}{2}(A^*_{11} - A^*_{22}) & \frac{1}{2}(A^*_{11} + A^*_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & A^*_{33} \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$A^*_{11} = \frac{3(1-\nu)}{3(1-\nu) + E\Delta\gamma},\quad A^*_{22} = \frac{1}{1+2G\Delta\gamma},\quad A^*_{33} = A^*_{22} \tag{86}$$

なお，この $\boldsymbol{A}$ については，Souza Neto ら [24] の著書が参考となる．

付録 C：Consistent 弾塑性接線係数

ここでは，リターンマッピングで得られた諸量を用いて，後退型 Euler 積分のための consistent 接線係数 $\mathbb{C}^{\mathrm{ep}*}$ を求める手順を記述する．

まず，$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ となるような 4 階のテンソル $\mathbb{P}$ を導入して式 (60)，(61) を整理すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\gamma\,\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta\gamma\,\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \end{aligned} \tag{87}$$

を得る．この式について時刻 $n+1$ における微分をとると

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : \{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \Delta\gamma\,\mathbb{P} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\} \tag{88}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\mathbb{C}^{-1} + \Delta\gamma\,\mathbb{P}\right) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{89}$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C}^* : \{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\} \tag{90}$$

となる．ここで，$\mathbb{C}^* = \left(\mathbb{C}^{-1} + \Delta\gamma\,\mathbb{P}\right)^{-1}$ とおいた．次に，式 (71) についても同様に

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} &= \left.\frac{\partial k}{\partial\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}\right|_{n+1} \mathrm{d}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} \\ &= H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} \end{aligned} \tag{91}$$

となる．ここで $\left.\dfrac{\partial k}{\partial\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}\right|_{n+1} = H'_{n+1}$ とおいている．ちなみに，本研究のように線形硬化則を用いる場合，$H'_{n+1} = E^{\mathrm{h}}$ である．さらに，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ は式 (62) および式 (72) を用いて

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \frac{2}{3}\Delta\gamma\,\bar{\sigma}_{n+1} \tag{92}$$

と表せるから，時刻 $n+1$ における微分をとると

$$\mathrm{d}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \frac{2}{3}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma\,\bar{\sigma}_{n+1}) + \frac{2}{3}\Delta\gamma\,\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} \tag{93}$$

となり，これを式 (91) に代入して

$$\left(1 - \frac{2}{3}H'_{n+1}\Delta\gamma\right)\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} = \frac{2}{3}H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\bar{\sigma}_{n+1} \tag{94}$$

$$\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} = \frac{2}{3}\eta\,H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\bar{\sigma}_{n+1} \tag{95}$$

を得る．ここで，$\gamma = \left(1 - \dfrac{2}{3}H'_{n+1}\Delta\gamma\right)^{-1}$ と置いた．

また，時刻 $n+1$ における偏差応力と相当応力の関係式は，式 (58) より

$$\bar{\sigma}^2_{n+1} = \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) \tag{96}$$

であるから，両辺を時刻 $n+1$ で微分して整理すると

$$\bar{\sigma}_{n+1}\,\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} = \frac{3}{4}\,\mathrm{d}\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) \tag{97}$$

$$= \frac{3}{2}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} \tag{98}$$

を得る．なお，ここで式 (59) の関係を用いて右辺の $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ の片方を $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ に置き換えていることに注意されたい．次に，式 (98) に式 (95) を代入して

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \frac{4}{9}\eta\,H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\bar{\sigma}^2_{n+1} \tag{99}$$

を得る．ここに式 (90) を代入すると

$$\frac{4}{9}\eta\,H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\bar{\sigma}^2_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : [\mathbb{C}^* : \{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\}] \tag{100}$$

となり，これを $\mathrm{d}(\Delta\gamma)$ について整理して

$$\mathrm{d}(\Delta\gamma) = \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : (\mathbb{C}^* : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})}{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) + \dfrac{4}{9}\,\eta\,H'_{n+1}\,\bar{\sigma}^2_{n+1}} \tag{101}$$

を得る．これを式 (90) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\
&= \mathbb{C}^* : \left\{ \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : (\mathbb{C}^* : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})}{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) + \dfrac{4}{9}\,\eta\,H'_{n+1}\,\bar{\sigma}^2_{n+1}}\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} \right\} \\
&= \left\{ \mathbb{C}^* - \frac{\left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) \otimes \left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right)}{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) + \dfrac{4}{9}\,\eta\,H'_{n+1}\,\bar{\sigma}^2_{n+1}} \right\} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\
&\equiv \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}
\end{aligned} \tag{102}$$

となり，ここでおいた $\mathbb{C}^{\mathrm{ep}*}$ が consistent 弾塑性接線係数となる．

参考文献

(1) Yuge, K., Kikuchi, N.: Optimization of a frame structures subjected to a plastic deformation, *Struct. Optim.*, Vol. 10, pp. 197–208, 1995.

(2) Schwarz, S., Ramm, E.: Sensitivity analysis and optimization for non-linear structural response, *Engrg. Comput.*, Vol.18, No. 3/4, pp. 610-641,2001.

(3) Maute, K., Schwarz, S., Ramm, E.: Adaptive topology optimization of elastoplastic structures, *Struct. Optim.*, Vol. 15, pp. 81–91, 1998.

(4) Schwarz, S., Maute, K., Ramm, E.: Topology and shape optimization for elastoplastic structural response, *Comput. Appl. Mech. Engrg.* Vol.190, pp.2135-2155, 2001.

(5) Choi K.K., Santos J.L.T.: Design sensitivity analysis of non-linear structural systems Part I: Thoery, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, pp. 2039–2055, 1987.

(6) Ohsaki M., Arora J.S.: Design sensitivity analysis of elastoplastic structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, pp. 737–762, 1994.

(7) Bugeda, G., Gil, L., Oñate, E.: Structural shape sensitivity analysis for nonlinear material models with strain softening, *Struct. Optim.*, Vol. 17, pp. 162–171, 1999.

(8) Hammer, V.B.: Optimal laminate design subject to single membrane loads, *Struct. Optim.*, Vol. 17, pp. 65–73, 1999.

(9) Stegmann, J., Lund, E.: Discrete material optimization of general composite shell structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 62, pp. 2009–2027, 2005.

(10) Gibiansky, L.V., Sigmund, O.: Multiphase composites with extremal bulk modulus, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, pp. 461–498, 2000.

(11) Sigmund, O., Torquato, S.: Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No. 6, pp. 1037–1067, 1997.

(12) Swan, C.C., Kosaka, I.: Voigt-Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behaviors, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 3785–3814, 1997.

(13) Bogomolny, M., Amir, O.: Conceptual design of reinforced concrete structures using topology optimization with elastoplastic material modeling, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 90, pp. 1578–1597, 2012.

(14) Kato, J., Lipka, A. and Ramm, E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 39, pp. 63–81, 2009.

(15) Kato, J., Ramm, E.: Multiphase layout optimization for fiber reinforced composites considering a damage model, *Eng. Struct.*, 49, pp. 202–220, 2013.

(16) Amir, O.: A topology optimization procedure for reinforced concrete structures, *Comput. and Struct.* , 114-115, pp. 46–58, 2013.

(17) Patnaik, S.N., Guptill, J.D. and Berke, L.: Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 3087–3120, 1995.

(18) Kleiber, M., Antúnez, H., Hien, T.D., Kowalczyk, P.: Parameter sensitivity in nonlinear mechanics, *John Wiley & Sons*, Chichester, England, UK, 1997.

(19) Kleiber, M., Kowalczyk, P.: Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 137, pp. 395–409, 1996.

(20) Zhang, Y., Kiureghian, A. Der.: Dynamic response sensitivity of inelastic structures, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 108, pp. 23–36, 1993.

(21) Hisada, T.: Recent Progress in Nonlinear FEM-Based Sensitivity Analysis, *JSME International Journal,* Series A, Vol.38, No.3, pp.301-310, 1995.

(22) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 89, pp. 309–336, 1991.

(23) Simo, J.C., Huches, T.J.R.: *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag New York, Inc., 1998.

(24) de Souza Neto, E.A., Perić, D., Owen, D.R.J.: *Computational methods for plasticity: Theory and applications*, John Willey & Sons, Inc., 2000.