土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 70, No. 2 (応用力学論文集 Vol. 17), I_317-I_328, 2014.

弾塑性材料の繰り返し載荷を考慮したマルチフェーズトポロジー最適化および解析的感度の精度検証

干場 大也[1]・加藤 準治[2]・高瀬 慎介[3]・寺田 賢二郎[4]・京谷 孝史[5]

[1]学生会員　東北大学大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
[2]正会員　東北大学助教　災害科学国際研究所（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: jkato@civil.tohoku.ac.jp
[3]正会員　東北大学研究員　災害科学国際研究所（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
[4]正会員　東北大学教授　災害科学国際研究所（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
[5]正会員　東北大学教授　大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）

本研究は，塑性変形を呈する複合材料のエネルギー吸収性能最大化を目的としたトポロジー最適化問題を設定し，それを解くために必要な感度導出法の精度について検証するものである．一般に弾塑性材料を対象にトポロジー最適化を適用するためには高精度な感度の導出が必要不可欠となる．しかし，応力–ひずみ関係に見られる降伏点ならびに荷重除荷点のいわゆる微分不可能な箇所近傍では感度を精度よく求めることが困難となる．そこで， 著者らは既往の研究[1)]で等方性弾塑性材料を対象として，力のつり合い式を満たす応力を忠実に微分する感度導出法を提案し，降伏点近傍においても高精度の感度が得られることを示した．本論文は，その発展として幾度も荷重載荷ー除荷状態を繰り返す塑性変形状態を想定し，そのような状況下において提案手法がどの程度の精度を保持できるかを検証するものである．

Key Words: *multiphase topology optimization, analytical sensitivity analysis, elastoplasticity, unloading, composites*

1. はじめに

本研究は，塑性変形を呈する複合材料のエネルギー吸収性能最大化問題を取り上げ，勾配を基本とする最適化アルゴリズムに不可欠な感度導出法の提案およびその感度の精度検証を実施するものである．

繊維補強プラスチックや合金，コンクリートをはじめとする構造用複合材料は，目的や用途に応じた様々な機能発現を期待して開発されている．力学的な視点からみた複合材料の利点のひとつは，性質の異なる材料をうまく組み合わせることによって，複合化された材料の力学的挙動を任意に制御できる点にある．これにより，応用すべき環境や条件に合わせて，意図した力学的性質を持つ材料を得ることが可能となる．

現在では，複合材料を構成する各材料の材料非線形性を十分に考慮し，その力学的な特性（長所）を発揮させることを意図した構造設計が行われるようになってきている．特に，低降伏点鋼合金の塑性変形性能を利用した金属製制震ダンパーや，脆性的な破壊を抑制する繊維補強コンクリート，履歴型減衰複合ゴムなど，構造に塑性化が生じることを前提として，その靭性改善やダンパーのエネルギー吸収性能向上を目的としたものが多く見受けられる．これらの力学的挙動を考慮した設計は非常に複雑であることから，近年ではコンピュータを使った数値実験を取り入れ，目的や所与の条件を満足する最適構造を求めるようなアプローチが取られている．しかし，これらの数値解析技術を持ってしても，最適な構造を見いだすことは困難であり，数値計算のトライアルアンドエラーに陥る結果となる．このような背景から，複合材料の材料非線形特性を活かして構造のエネルギー吸収性能を改善するための構造最適化手法の開発が求められている．

ところで，構造最適化に関する研究については，扱う構造問題が複雑になると計算コストが膨大になり，また理論も難解となることからその多く研究が線形弾性体の単一材料からなる単純な構造に限定した問題を対象としている．単一材料の材料非線形性を考慮した最適化の研究については，感度解析を主題とする様々な研究成果が報告されている．幾つか例を挙げると，弾塑性材料モデルに関していえば，Yuge and Kikuchi[2)]，Schwarz and Ramm[3)]，Maute et al.[4)], Schwarz et al.[5)]は連続体モデルを対象とした最適化問題を，Choi and Santos[6)]や Ohsaki and Arora[7)]はトラス構造などのような離散的な構造における弾塑性挙動を考慮した最適化問題を紹介している．

また，連続体損料モデルを対象としたものでは Bugeda et al.[8]の形状最適化手法に関する研究報告がある．

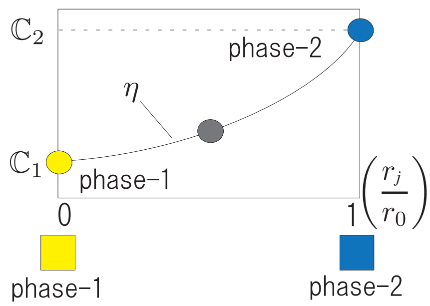
一方，複合材料を対象とした構造最適化の研究は，繊維強化複合材料における繊維の最適方向角を決定する問題[9),10)] や構成材料の最適配置を決定する問題[11),12)]が多く報告されているが，単一材料の場合と同様にその殆どが線形弾性域を対象としたものである．また，複合材料と材料非線形性の両方を考慮した最適化手法に関する研究報告については，著者らの知る限り数少ない．例えば，Swan and Kosaka [13)]は，古典的な Voigt–Reuss 混合式を用いた弾塑性材料のトポロジー最適化に関する研究を報告し，Bogomolny and Amir[14)] は，鉄筋コンクリートのトポロジー最適化問題に Drucker-Prager の塑性モデルを考慮している．また，複合材料に連続体損傷モデルを組み入れた最適化問題としては，Kato et al.[15)16)]，Amir[17)]の研究報告しか見当たらない．

それゆえ，本研究では既に述べた「複合材料の材料非線形特性を活かして構造のエネルギー吸収性能を改善する」ための一つの方法として，複合材料の弾塑性変形挙動を考慮してその最適な材料配置を決定するトポロジー最適化問題を取り扱う．

ところで，この最適化問題を扱う上で重要となるのが構造の非線形挙動を考慮した感度解析法およびその精度である．弾塑性材料に関する感度の導出法に関しては，これまでに様々な研究成果 (例えば，Kleiber et al.[19)], Kleiber[20)], Ohsaki and Arora[7)], Schwarz and Ramm[3)], Maute et al.[4)], Schwarz et al.[5)], Zhang and Kiureghian[21)], Hisada[22)]) が報告されている．

弾塑性材料を扱う上での課題は，降伏点ならびに荷重除荷点において応力–ひずみ関係が微分不可能な状態になり，そこでの応力感度（応力の設計変数に関する微分）を正しく評価することが困難となる点である．Ohsaki and Arora[7)]は，この問題を詳細に検討しているがトラス構造を対象としたため，連続体からなる構造物についても同等の検討が必要である．上記の感度解析に関する研究報告において高精度の感度を得るための条件として明らかになっているのは，(i) Euler 型の後退積分法で consistent な弾塑性接線係数を用いること[21)]，(ii) リターンマッピングアルゴリズムによる応力積分法を用い，感度解析においてもそれに整合した感度を導出する必要があること[22)]である．

このような背景から，著者らは既往の研究で，Hisada[22)]らの提案する応力感度の導出法を参考に，目的関数である複合材料を対象としたエネルギー吸収性能最大化のための新たな感度導出法を定式化し，降伏点近傍においても高精度の感度が得られることを示した．本論文は，その発展として幾度も荷重載荷ー除荷状態を繰り返す塑性変形状態を想定し，そのような状況下において提案手法がどの程度の精度を保持できるかを検証するものである．



図–1 2 層材料最適化の概念

なお，本研究で用いる弾塑性材料モデルは，等方性の線形硬化則を用いた von Mises の弾塑性材料モデルである．また，その応力積分については後退型 Euler 積分にリターンマッピングを採用して consistent 接線係数を用いる．これらについては，既に様々な文献で詳細に記されていることから本文で記述しないが，後の感度の導出法の説明に幾つかの式が必要となるため，巻末の付録に記述することとした．

2. 設計変数の定義

本節は，複合材料のトポロジー最適化における設計変数を定義する．提案するトポロジー最適化は，SIMP 法

[23)] (Solid Isotropic Microstructure with Penalization of intermediate densities) の概念を複合材料に拡張したものである．**図–1** はその概念を表しており，2 つの固相からなる複合材料を対象とした 2 相材料最適化配置を意図したものである. SIMP 法では，単一材料からなる多孔質体を想定し，設計変数は有限要素ごとに設定された材料密度として定義されるが，本研究では 2 相の複合材料を想定するため，設計変数は phase-1 と phase-2 の材料体積比に置き換えられる．したがって，N 個の有限要素メッシュで離散化された j 番目の要素について，設計変数 $s_j\,(j=1,2,\cdots,N)$ を以下のように定義する．

$$s_j = \frac{r_j}{r_0} \qquad 0 \le s_j \le 1 \tag{1}$$

ここで，r_j は j 番目の要素における phase-2 の体積，r_0 はその要素の体積である．ちなみに，この設計変数を用いて単一材料（多孔質材料）の最適化を行う場合は，phase-2 の材料定数を固体材料のそれに設定し，phase-1 の材料定数を 0 に設定すればよい．

3. 弾塑性材料モデルとその正則化

von Mises の降伏関数 Φ および bi-linear 型の硬化関数 k を以下のように表す．

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3}k^2(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{2}$$

$$k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \sigma_{\mathrm{y}} + E^{\mathrm{h}}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}'$ は偏差応力テンソル，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ は相当塑性ひずみ，σ_{y} は初期降伏応力，E^{h} は硬化係数である．

また，この弾塑性モデルの材料パラメータである

ヤング率 E および E^{h}，σ_{y} について，これらの有効材料パラメータをそれぞれ設計変数 s_j を用いて以下のように設定した．

$$E_j = \begin{cases} \left(1 - s_j^\eta\right)E_1 + s_j^\eta E_2 & E_1 \leq E_2 \\ \left(1 - s_j\right)^\eta E_1 + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^\eta\right\}E_2 & E_1 > E_2 \end{cases} \tag{4}$$

$$E_j^{\mathrm{h}} = \begin{cases} \left(1 - s_j^\eta\right)E_1^{\mathrm{h}} + s_j^\eta E_2^{\mathrm{h}} & E_1^{\mathrm{h}} \leq E_2^{\mathrm{h}} \\ \left(1 - s_j\right)^\eta E_1^{\mathrm{h}} + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^\eta\right\}E_2^{\mathrm{h}} & E_1^{\mathrm{h}} > E_2^{\mathrm{h}} \end{cases} \tag{5}$$

$$\left(\sigma_{\mathrm{y}}\right)_j = \begin{cases} \left(1 - s_j^\eta\right)\sigma_{\mathrm{y}1} + s_j^\eta \sigma_{\mathrm{y}2} & \sigma_{\mathrm{y}1} \leq \sigma_{\mathrm{y}2} \\ \left(1 - s_j\right)^\eta \sigma_{\mathrm{y}1} + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^\eta\right\}\sigma_{\mathrm{y}2} & \sigma_{\mathrm{y}1} > \sigma_{\mathrm{y}2} \end{cases} \tag{6}$$

ここで，添え字 1，2 により 2 つの材料の材料定数を区別し，η は物理的意味を保証しないべき乗数である．このように 2 種材料を滑らかな関数で内挿補間することを正則化とよぶ．これにより各要素における材料パラメータが設計変数に依存することになり，構造のトポロジーを制御する設計変数が埋め込まれることになる．

4. 最適化問題の設定

本研究では，複合材料の塑性変形下にある構造のエネルギー吸収性能を目的関数とし，それを最大化する．この吸収したエネルギーは制御点変位に関する仕事量として表すことができ，その仕事量は，荷重–変位曲線が囲う面積として求められる．また，制約条件としては，構造全体の使用材料を一定に制限するものとする．目的関数 $f(\boldsymbol{s})$ および等式制約条件 $h(\boldsymbol{s})$ を以下のように設定する．

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad f(\boldsymbol{s}) &= -\int_\Omega \int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega \\ &= -\int_\Omega \int_{\hat{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{7}$$

$$\text{subject to} \quad h(\boldsymbol{s}) = \int_\Omega s_j\,\mathrm{d}\Omega - \hat{V} = 0 \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソル，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は線形ひずみテンソルである．また，t は時間を意味し，$(\dot{\bullet})$ は時間微分を指す．$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は制御点変位 $\hat{u}$ に従う全ひずみであり，$\hat{V}$ は構造全体の phase-2 の体積，$\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{s} = \{s_1, ..., s_N\}$ で表される設計変数（ベクトル）である．

なお，ここでは最小化問題として扱うために目的関数に -1 を乗じている． 本研究では最適化アルゴリズムである最適性規準法を用いて，この最適化問題を解くこととする．

5. 感度の導出

(1) 目的関数の感度の導出

本節では，目的関数の感度評価式の導出方法を提案する．本研究では，この非線形構造問題を準静的に解くため，ここでは擬似的な時刻（あるいは荷重ステップ）を表す変数 n を用いて，式 (7) を次式のような増分的なものに書き換える．

$$f(\boldsymbol{s}) = \sum_{n=1}^{n_{\mathrm{step}}} f_n(\boldsymbol{s}) \tag{9}$$

ここで，n_{step} は荷重ステップの総数である．f_n は時刻 $n-1$ から時刻 n の間において算出される目的関数値を意味し，次式のように表すことができる．

$$f_n(\boldsymbol{s}) = -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_n : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_n\,\mathrm{d}\Omega \tag{10}$$

これをもとに目的関数の，あるひとつの設計変数 s_j に対する勾配を求める．なお，以降で簡単のため $\dfrac{\partial}{\partial s_j}$ を ∇_{s_j} と表記する．まず，式 (9) の勾配については，次式のように計算できる．

$$\nabla_{s_j} f(\boldsymbol{s}) = \sum_{n=1}^{n_{\mathrm{step}}} \nabla_{s_j} f_n(\boldsymbol{s}) \tag{11}$$

また，式 (10) の勾配については，後の説明との整合を図るため，敢えて時刻 n から現時刻 $n+1$ の間で算出される目的関数値 f_{n+1} について記述すると次式のようになる．

$$\begin{aligned} \nabla_{s_j} f_{n+1} &= -\nabla_{s_j}\left(\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\,\mathrm{d}\Omega\right) \\ &= -\int_\Omega \left\{\left(\nabla_{s_j}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\right\}\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{12}$$

なお，本論文では時刻 n における変数は既知であるものとする．ひずみ増分 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ は現時刻 $n+1$ の構造解析によって求められる変数であるため，その勾配 $\nabla_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ を陽的に求めることはできない．このため，$\nabla_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ は陰的な微分項と呼ばれる．本研究では，この $\nabla_{s_j}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ を以下の条件のもとに消去することから始める．

まず，時刻 $n+1$ におけるつり合い方程式の弱形式，

すなわち仮想仕事式は以下のように与えられる．

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega - \lambda_{n+1} \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u} \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{t}} = 0 \qquad (13)$$

ここで，λ_{n+1} は現時刻における荷重係数を指し，$\boldsymbol{t}_0$ は基本の表面力ベクトルで一定値である．なお，簡単のためここでは物体力を考慮していないがつり合い式の一般性は失わない．次に，仮想仕事式における仮想変位 $\delta\boldsymbol{u}$ およびそれに対応する仮想ひずみ $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ は任意に選択できるため，式 (13) において $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ および $\delta\boldsymbol{u} = \nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{u}_{n+1}$ と置き換えてもそのつり合い式は満足する．

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \mathrm{d}\Omega - \lambda_{n+1} \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t}_0 \cdot \nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{u}_{n+1} \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{t}} = 0 \quad (14)$$

ちなみに，ここでの勾配は設計変数ベクトル $\boldsymbol{s}$ に対する勾配ではなく，設計変数のひとつの成分 s_j に関する勾配であるため，$\nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$（あるいは $\nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{u}_{n+1}$）は仮想ひずみ（あるいは仮想変位）と同じ次元のテンソルである．それゆえ，式 (14) において数学的な次元の不整合は生じない．

これらの式を準備した上で，ここでは「荷重が変位制御点だけに作用する」という特別な荷重条件を仮定する．これは，変位制御点に所与の変位増分を与えたときに，つり合い条件を満たす荷重係数 λ_{n+1} と変位制御点以外の節点変位ベクトルを求めることを意味している． まず，変位制御点に課せられる変位成分 $\hat{u}$ あるいはその増分 $\mathrm{d}\hat{u}$ は，設計変数 $\boldsymbol{s}$ とは無関係に荷重条件として決定されるものであるから，その勾配は $\nabla_{s_j}\mathrm{d}\hat{u} = 0$ となる．そのため，制御点全体の変位増分ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{u}_{n+1}$（あるいは $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}_{n+1}$）は基本の表面力ベクトル $\boldsymbol{t}_0$ が常に一定で設計変数 $\boldsymbol{s}$ にも依存しないことも加味すると，$\boldsymbol{t}_0 \cdot \nabla_{s_j} \mathrm{du}_{\mathrm{n}+1} = 0$ となることがわかる．これは，式 (14) の左辺第 2 項の被積分項に他ならず，式 (14) は次式のように簡略化できる．

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (15)$$

これより，この荷重条件のもとで式 (12) の第 2 項は消去することができ，式 (12) は以下のように書き換えられる．

$$\nabla_{s_j} f_{n+1} = -\int_{\Omega} \left(\nabla_{s_j} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \mathrm{d}\Omega \qquad (16)$$

そのため，あとは応力の設計変数に対する勾配 $\nabla_{s_j} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ を求めることができれば目的関数の感度が得られることになる．なお，以降で $\nabla_{s_j} \boldsymbol{\sigma}$ を応力感度と呼ぶことにする．

一方，Maute ら[4]や Schwarz ら[5]，Schwarz と Ramm[3] もエネルギー吸収性能最大化を目的関数とする最適化問題を取り扱っているが，その感度の導出のために，まずは応力増分 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ を

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \qquad (17)$$

とし，その応力感度を以下のように直接微分することを出発点としている．

$$\nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \nabla_{s_j} \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \qquad (18)$$

ここで，$\mathbb{C}^{\mathrm{ep}*}$ は consistent 接線係数テンソルである．次に，式 (18) を式 (12) に代入し，それを式 (11) で足し合わせて次式のように整理し，

$$\nabla_{s_j} f = -\int_{\Omega} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Big(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} : \nabla_{s_j} \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + 2\, \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \nabla_{s_j} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\Big) \mathrm{d}\Omega \qquad (19)$$

さらに，前述のように特殊な荷重条件を設定することで陰的項を消去して，次のような目的関数の感度評価式を提案している．

$$\nabla_{s_j} f = -\int_{\Omega} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} : \nabla_{s_j} \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega \qquad (20)$$

この場合，目的関数の感度を得るためには接線係数テンソルの勾配 $\nabla_{s_j} \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*}$ を求めればよいことになる．しかし，その出発点である式 (17) は，そもそも構造解析上のつり合い点を求めるために用いられるもので，応力増分を正しく表した式ではないことに注意する必要がある．つまり，Maute et al.[4]や Schwarz et al.[5]，Schwarz and Ramm[3] に示される応力感度の式は，“つり合いを満たす応力” の感度を求めていない．その結果，塑性化が進行するにつれてその応力感度の誤差が蓄積されてゆき，また，降伏点や荷重除荷などによる応力変化点，つまり微分不可能な点近傍において特に大きな誤差が生じることとなる．

そこで，本研究では式 (16) の感度評価式の精度を担保するために，“つり合い方程式を満たす応力” の感度 $\nabla_{s_j} \boldsymbol{\sigma}$ を求めることとした．この導出については (3) 節で詳述するが，各増分ステップにおいてそれまでの履歴の影響を考慮しながら $\nabla_{s_j} \boldsymbol{\sigma}$ を更新していくことになる．

なお，以降に記述する条件付き微分および応力感度の求め方は，Hisada et al.[22]の文献を参考に定式化したものである．

(2) 条件付き微分

ここでは，次節で用いることになる条件付き微分の考え方について概説する．弾塑性材料モデルおよび増分解析を用いて最適化を行うとき，例えば応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は，変位 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s})$ と設計変数 $\boldsymbol{s}$ で構成される関数とみなすことが

できる．よって，現時刻 $n+1$ における $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ は

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}\left(\boldsymbol{u}_{n+1}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{u}_{n}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{u}_{n-1}(\boldsymbol{s}), \cdots, \boldsymbol{u}_{1}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{s}\right) \tag{21}$$

と表すことができる．この式は第 n ステップで目的関数が $\boldsymbol{u}_{n+1}$ のみならず過去の履歴によって決まることを表している．こうした経路依存問題のための微分法について，設計変数の変分 δs_j に起因する式 (21) の変分を次のように表す．

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{u}_{n+1}}\delta\boldsymbol{u}_{n+1} + \delta^{*}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{22}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\delta^{*}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &\equiv \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{u}_{n}}\delta\boldsymbol{u}_{n} + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{u}_{n-1}}\delta\boldsymbol{u}_{n-1} \\ &\quad + \cdots + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{u}_{1}}\delta\boldsymbol{u}_{1} + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial s_j}\delta s_j \\ &\equiv \frac{\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\mathrm{d}s_j}\delta s_j\end{aligned} \tag{23}$$

ここで，$\delta^{*}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ は，$\boldsymbol{u}_{n+1}$ のみを固定し，他の全変数の変分を考慮した $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ の変分 (条件付き変分) であり，$\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}/\mathrm{d}s_j$ は同じく条件付き微分を表す．なお以降では簡単のため $\mathrm{d}^{*}/\mathrm{d}s_j$ を $\nabla^{*}_{s_j}$ と表記する．

(3) 応力感度の導出

ここでは，時刻 n から現時刻 $n+1$ までの増分をとるとき，時刻 n において既知である諸量を用いて，現時刻 $n+1$ の応力感度 $\nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ を求める方法を記述する．この手法において，求めた時刻 $n+1$ における応力感度および関連する諸量の設計変数に対する勾配を次の増分ステップにおける既知量として用いることで，その時点までの履歴の影響を考慮しながら応力感度を更新することができる．この際，前述した条件付き微分を用いて設計変数に対する勾配を求めるものとし，また，初期の状態ではそれぞれの勾配を 0 とする．なお，本節で紹介される個々の変数については付録で詳細に記しているため，それを参照されたい．

まず，現時刻 $n+1$ における最終応力を偏差成分と体積成分に分解し，

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} + p^{(\mathrm{F})}_{n+1} : \boldsymbol{I} \tag{24}$$

さらに，両辺を $\nabla^{*}_{s_j}$ による偏微分を行うと以下のようになる．

$$\nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} + \nabla^{*}_{s_j}p^{(\mathrm{F})}_{n+1} : \boldsymbol{I} \tag{25}$$

ここで，p は静水圧，$\boldsymbol{I}$ は 2 階の恒等テンソルである．以下では，式 (25) 右辺の 2 つの微分項を別々に導出する．最初に，$\nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を求めるために付録に示したいくつかの関係式を参照する．

まず，最終相当応力 $\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ について，式 (II.3) より

$$\Delta\gamma = \frac{3}{2}\,\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}} \tag{26}$$

と置け，これを式 (II.9) に代入して整理すると，偏差応力についての試行応力と最終応力の関係式は

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{1}{1+2G\Delta\gamma}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{27}$$

と表すことができる．ここで，式 (27) に $\nabla^{*}_{s_j}$ による偏微分を行うと，以下のようになる．

$$\nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{\nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}}{1+2G\Delta\gamma} - \frac{2G\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\gamma) + 2\Delta\gamma\,\nabla_{s_j}G}{(1+2G\Delta\gamma)^2}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{28}$$

これより，$\nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ および $\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\gamma)$，$\nabla^{*}_{s_j}G$ が求まればよいことがわかる．$\nabla^{*}_{s_j}G$ については，式 (4) の弾性係数テンソルの成分であるので容易に求まる．$\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\gamma)$ については，式 (26) の $\nabla^{*}_{s_j}$ による偏微分を行うと，

$$\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\gamma) = \frac{3}{2}\left(\frac{\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}} - \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\,\nabla^{*}_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}{\left(\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}\right)^2}\right) \tag{29}$$

となり，$\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ および $\nabla^{*}_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が必要となる．よって，以下では $\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ と $\nabla^{*}_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$，および前述の $\nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ を含めた 3 つの微分項を求めるための誘導を行う．

まず，リターンマッピングアルゴリズムに従って，試行応力および最終応力についての基本式を導入する．式 (II.5) を偏差応力について表すと次式となる．

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_{n} + 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{30}$$

次に，式 (I.10) より，試行応力について次式を得る．

$$\left(\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \tag{31}$$

また，式 (II.12) は設計変数 $\boldsymbol{s}$ に依存するためそれを加味して以下のように書き改める．

$$\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}, \boldsymbol{s}\right) \tag{32}$$

また，式 (II.11) より，試行応力と最終応力の関係式として以下を得る．

$$\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - 3G\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{33}$$

これら式 (30)〜(33) について $\nabla^{*}_{s_j}$ による偏微分を行うと，それぞれ以下の式を得る．

$$\nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'_{n} + 2\left(\nabla_{s_j}G\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{34}$$

$$\nabla^{*}_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{1}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}}\left(\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} : \nabla^{*}_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \tag{35}$$

$$\nabla^{*}_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{\partial k}{\partial\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}}\left\{\nabla^{*}_{s_j}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \nabla^{*}_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})\right\} + \frac{\partial k}{\partial s_j} \tag{36}$$

$$\nabla^{*}_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \nabla^{*}_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - 3\left(\nabla_{s_j}G\right)\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - 3G\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{37}$$

ただし，ここでは次式を用いた．

$$^{t'}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = {}^{t}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{38}$$

なお，式 (34) を導くにあたっては，$\nabla^{*}_{s_j}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}') = 0$ とし，局所的な陰的項を消去していることに注意されたい．こ

表–1 使用材料

	弾塑性材料 1	弾塑性材料 2
ヤング係数 E	30(MPa)	1960(MPa)
ポアソン比 ν	0.3	0.3
初期降伏応力 σ_{y}	1.0(MPa)	2.9(MPa)
硬化係数 E^{h}	10(MPa)	900(MPa)

こで，式 (35) に式 (34) を代入することで

$$\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{1}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}}\left[\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} : \left\{\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'_n + 2\left(\nabla_{s_j}G\right)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}'\right\}\right] \quad (39)$$

が得られ，さらに式 (37) に式 (36) を代入し，$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ について整理することで

$$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \frac{\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - \dfrac{\partial k}{\partial\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}}\nabla^*_{s_j}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_n - \dfrac{\partial k}{\partial s_j} - 3\left(\nabla_{s_j}G\right)\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\dfrac{\partial k}{\partial\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}} + 3G} \quad (40)$$

が得られる．これにより，$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ が既知量を用いて求まることになる．よって，式 (39), (40) を式 (37) に代入することで $\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を得ることができる．

最後に，$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ は式 (II.5) を $\nabla^*_{s_j}$ によって偏微分した式

$$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}_n + \nabla_{s_j}\mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n) \quad (41)$$

によって求められる．ただし，ここでも $\nabla^*_{s_j}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ とおいて局所的な陰的項を消去している．以上から，$\nabla^*_{s_j}(\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ および $\nabla^*_{s_j}\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$，$\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ がすべて求められたので，式 (28) で示される最終の偏差応力感度 $\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が求まる．

一方，静水圧は $p^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}\right)$ であるが，式 (II.7) より，以下の関係が成り立つため，

$$\nabla^*_{s_j}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}\right) = \nabla^*_{s_j}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) = \mathrm{tr}\left(\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \quad (42)$$

静水圧の感度は次式で表すことができる．

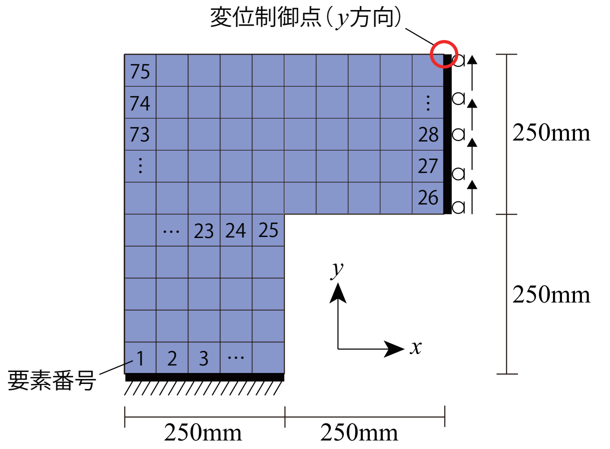
$$\nabla^*_{s_j}p^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}\right) \quad (43)$$

この式に，式 (41) を代入することで静水圧の感度が求まる．

以上より，ここで求めた $\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ および $\nabla^*_{s_j}p^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を式 (25) に代入することで最終的な応力感度 $\nabla^*_{s_j}\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が求まり，それを式 (16) に用いることで，陰的積分により求められた，“つり合い方程式を満たす応力” と整合する目的関数の感度が求められる．

6. 感度の精度検証

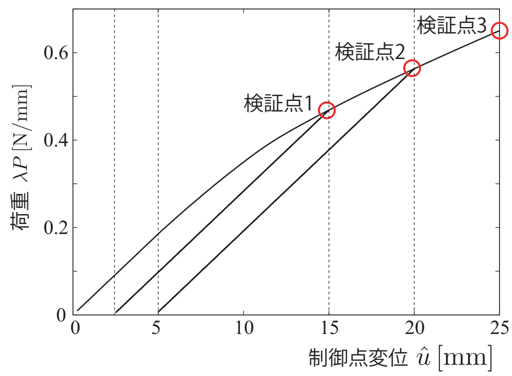
本節では，新たに定式化した目的関数の解析的感度の精度を比較検証する．ここでは，荷重載荷による塑性変形の進展と荷重除荷を繰り返し与える荷重条件を



図–2 感度の精度検証に用いた有限要素メッシュおよび荷重条件

表–2 構造に与える変形と制御点変位量

	増分ステップ数	制御点変位 $\hat{u}$
1: 載荷 I	60	15.0(mm)
2: 除荷 I	50	-12.5(mm)
3: 載荷 II	70	17.5(mm)
4: 除荷 II	60	-15.0(mm)
5: 載荷 III	80	20.0(mm)
計	320	25.0(mm)

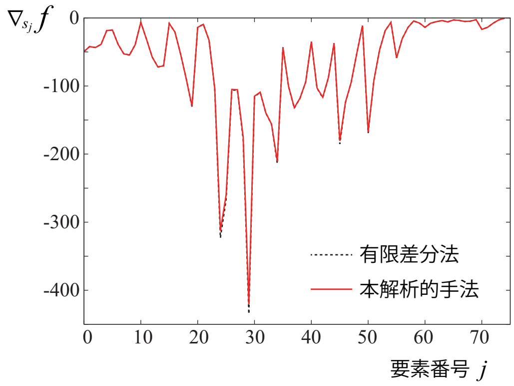


図–3 変形経路と 3 つの精度検証点

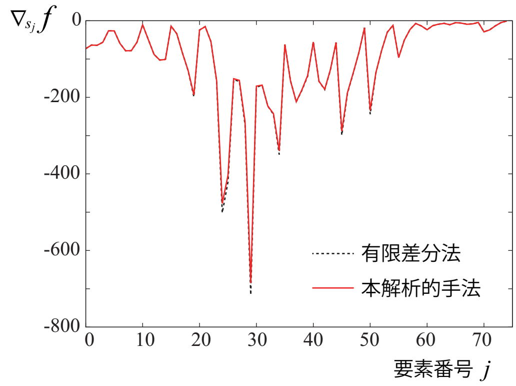
設定し，このような過酷な条件下における感度の精度検証を主な目的とする．比較の対象は次式のような有限差分法によって求められる感度である．

$$\nabla_{s_j}f = \frac{f(\boldsymbol{s}+\Delta\tilde{\boldsymbol{s}}) - f(\boldsymbol{s})}{\Delta s_j} \quad ; \quad \Delta\tilde{s}_i = \delta_{ij}\Delta s_j \quad (44)$$

ここで，δ_{ij} はクロニッカーデルタ，Δs_j は設計変数の僅かな変化，$\Delta\tilde{\boldsymbol{s}}$ は，j 番目の成分のみ Δs_j を持ち，それ以外の成分はゼロを有するベクトルである．有限差分法による感度解析は計算量が膨大になるものの，比較的精度の良い感度を与えることが知られており，それゆえ感度の参照値として用いられる．



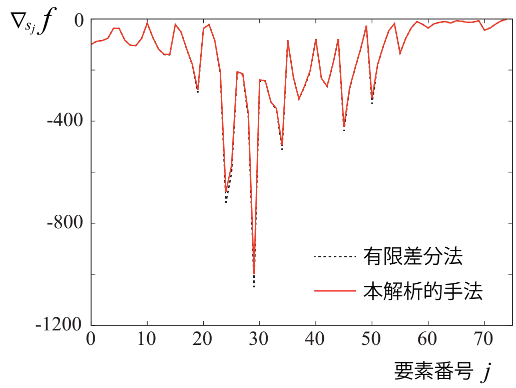
図–4 検証点 1（最適化ステップ:60）における初期感度の比較



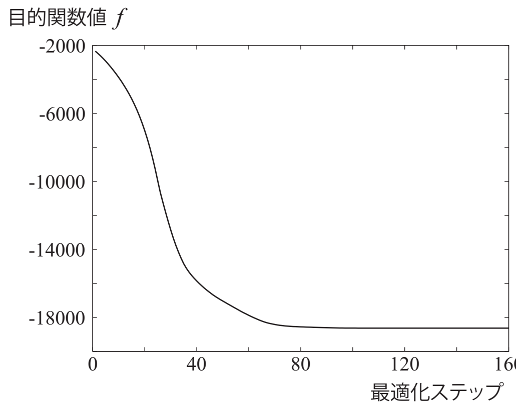
図–5 検証点 2（最適化ステップ:180）における初期感度の比較

構成材料のパラメータを**表–1** のように設定するが，ここで弾塑性材料 1 はゴム，弾塑性材料 2 はポリプロピレンに相当する．また，**図–2** に示す 8 節点四辺形要素 75 個からなる有限要素モデルを使用し，平面応力状態を仮定した．変位制御点は図中右上の節点であり， 各要素は図中に示す要素番号と対応するものとする．また， 各増分ステップにおける制御点変位を**表–2** のように与えることで，**図–3** に示すような材料の降伏後に除荷による弾性変形を経るような塑性変形を想定している．ここで制御点に y 方向に正の変位を与えることで載荷状態を，負の変位を与えることで除荷状態を意図している．この変形経路において，増分ステップ 60（載荷 I），180（～載荷 II），320（～載荷 III）の段階においてそれぞれ感度の比較検証を行う．

3 つの検証点における比較結果を**図–4**，**図–5**，**図–6** に示す．それぞれの図は横軸に要素番号，縦軸に最適化ステップ初回の感度をとったもので，各要素において求められた感度がどれほど正しい値に沿っているかを表している．これらの図より，すべての検証点で有限差分法および解析的手法による感度が示す 2 本の曲線がおおよそ一致している． 感度の大きい要素，すなわち大きな塑性変形が生じている要素ではわずかに誤差がみられるものの，例えば**図–6** において最大誤差は 2.85%にとどまっている．これは，塑性ひずみが極めて大きい（相当塑性ひずみ 4.59%）ことを考慮すると，十分に小さな誤差であるといえる． つまり，弾塑性構造解析において降伏点および除荷点を経過しても解析的感度の精度が良好に保たれることがわかり，提案手法による感度解析は高い精度を有するといえる．この結果をもって，以降に示す最適化計算によって得られた構造のトポロジーの妥当性を裏付けるものとする．



図–6 検証点 3（最適化ステップ:320）における初期感度の比較

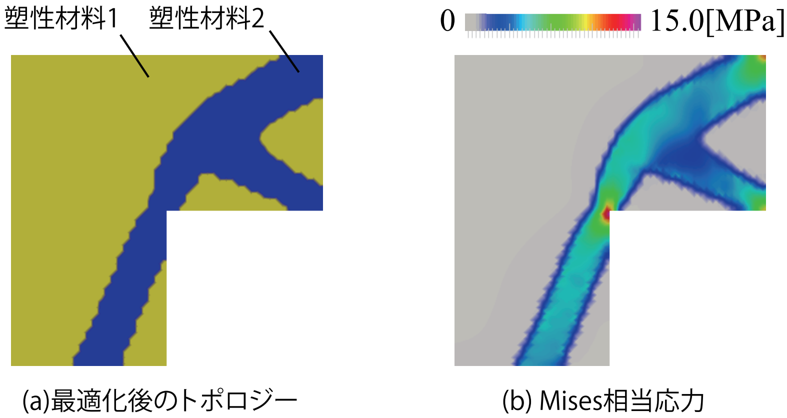


図–7 目的関数値の推移（繰り返し塑性変形を考慮した場合）

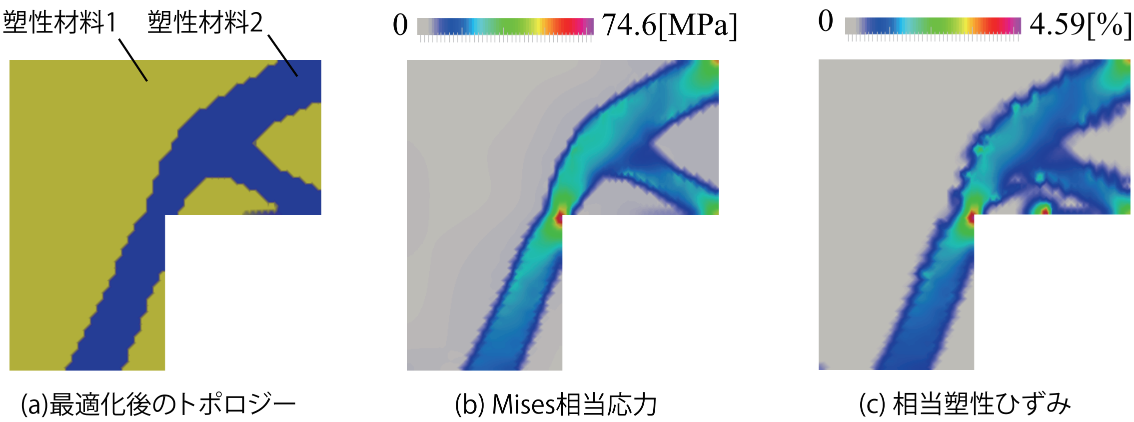
7. 最適化数値計算例

本節では，複合材料で構成された L 型プレートに片振りの繰り返し塑性変形を与え，そのエネルギー吸収性能を最大にするトポロジー最適化問題を取り扱う．計算には第 6 節と同様に**図–2** に示した設計領域および荷重条件を用いるが，有限要素メッシュの要素数は 75 から 1875 に増やした，また，本研究では塑性変形問題を前提とするが，参考までに線形弾性変形レベルの小さな荷重を載荷した場合の最適化計算例も別途実施した．

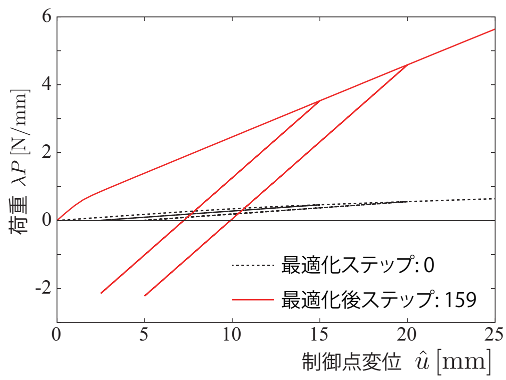
各増分ステップについては，**表–2** に示す制御点変位を与え，線形弾性変形レベルを考慮した場合は，増分ステップ数 1，$\hat{u}$ = 0.25[mm]，繰り返し塑性変形を考慮した場合は，増分ステップ数 320，$\hat{u}$ = 25.0[mm] としての最適化した．



図–9 弾性変形レベルの小さな荷重を与えた場合の最適化結果



図–10 繰り返し塑性変形を考慮した最適化結果



図–8 最適化後の荷重-変位曲線（繰り返し塑性変形を考慮した場合

まず，塑性変形を考慮した場合について，目的関数値の推移と最適化後の荷重-変位曲線をそれぞれ**図–7**，**図–8** に示す．これより，目的関数値が安定的に減少し，また荷重載荷–除荷を繰り返しつつ，荷重–変位曲線が囲う面積が大幅に増加していることがわかる．なお，最適化された構造においては，所与の除荷 I および II 終端の変位量まで制御点変位を戻すと，逆方向（$-y$ 方向）の荷重を載荷することになる様子が見られ，力学的に正しい挙動を模擬できていることがわかる．また，**図–10** は，最適化されたトポロジーおよび Mises 応力，相当塑性ひずみを示している．これより，ヤング係数と降伏応力度ともに大きいパラメータを持つ弾塑性材料 2（青）が支配的な材料として，塑性化が卓越する L 字型プレート内側のエッジ部を中心に分布していることがわかる．一般に単一材料からなるトポロジー最適化では，得られた最適化トポロジーの最適性を直感的に理解しやすいが，複合材料の場合は剛性の低い材料（弾塑性材料 1）も応力を伝搬するため，理解しづらいことが多い．この結果を見て，最適構造であることを断定することは困難であるが，目的関数の減少状況から力学的に合理的な（局所的）最適解であると判断できる．

次に**図–9** と**図–10** を見比べながら，線形弾性変形レベルの場合と繰り返し塑性変形を考慮した場合の最適化結果を吟味する．　ここでは，わずかに異なるトポロジーが得られているものの，それほど大きな違いは得られていないことがわかる．これは，**表–1** に示した材料パラメータの設定による影響が原因である．既往の文献[1)]では，異なる 2 つの材料の応力—ひずみ曲線が

途中で交差するような，特性の大きく異なる 2 材料を用いており，その場合は弾性変形レベルと塑性変形レベルで明らかに異なる最適化トポロジーが得られている．ただし，本計算例では敢えてそれらが交差しない曲線を用いて最適化計算を実施している．この設定では，使用する 2 材料の物性値は大きく異なるものの，両者の応力–ひずみ曲線が交差せずに同様な応答を示すものを想定しており，弾性変形レベルおよび塑性変形レベルでも概ね同様のトポロジーが得られることを意味している．ここで，線形弾性体において所与の変位を制御した条件下でエネルギー吸収性能を最大にする問題は，ひずみエネルギー最大化問題，すなわち剛性最大化問題と等価であるといえる．すなわち，このような 2 材料を使用した場合では，線形弾性体と仮定して剛性最大化のトポロジーを得て設計しておけば，必然的に塑性変形が卓越するような非線形領域でも比較的大きなエネルギー吸収性能を有する構造であることを示唆している．このことは，実設計において有用な結論であると言える．

8. 結論

本研究は，構造のエネルギー吸収性能最大化を目的関数とし，複合材料の材料非線形性を考慮したトポロジー最適化手法の開発を行った．その中で，複合材料の弾塑性挙動を考慮した感度解析手法として，リターンマッピングアルゴリズムに整合した応力感度を取り入れ，目的関数の設計変数に対する解析的感度式を提示した．また，本研究では，有限差分法による感度との比較検証を行い，繰り返し載荷を想定した過酷な載荷条件下においても，その精度が十分に保証されることを確認した．これにより，弾塑性材料を扱う最適化問題において感度の精度を担保するためには，リターンマッピングによる応力積分に整合した応力感度が必要不可欠であり，繰り返し載荷問題にも適用できることが示された．

付録 I　等方性弾塑性材料モデル

本研究で用いた等方性弾塑性材料モデルおよびリターンマッピングアルゴリズム, consistent 接線係数は，既によく知れたものであり，敢えてそれらを記述する必要性はないが，本研究で定式化した解析的感度の導出において，それらの多くの関係式が本文で引用されている．そのため，付録としてそれらについて概説しておく．

まず，弾塑性変形において，全ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は，弾性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ と塑性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ の和として以下のように表される．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{I.1}$$

また，塑性変形中も Hooke 則が成立すると仮定すると，以下の式が得られる．

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{I.2}$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ はコーシー応力テンソル，$\mathbb{C}$ は弾性剛性テンソルである．なお，ここでは便宜上速度形で表している．von Mises の降伏条件を用いて，降伏応力が相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ のみに依存して変化すると仮定すると，降伏関数 Φ は硬化関数 $k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ を用いて以下のように与えられる．

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3}k^2(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{I.3}$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}'$ は偏差応力テンソル，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ は相当塑性ひずみである．なお，後述するリターンマッピングの手法を用いる際に都合がよいため，ここでは降伏関数を 2 乗した形式で与えている．また，弾塑性材料モデルの硬化則は実材料に合わせて様々に設定できるが，本研究においては簡易な速度非依存の等方線形硬化則を仮定し，硬化関数 $k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ を以下のように与える．

$$k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \sigma_{\mathrm{y}} + E^{\mathrm{h}}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{I.4}$$

ここで σ_{y} は初期降伏応力，E^{h} は加工硬化係数である．なお，ここでは計算に用いるための具体的な硬化則を示したが，(3) 節の感度解析においては，硬化関数が $k(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ で表されるような一般的な硬化則について記述するものとする．ただし，移動硬化は考慮していない．式 (I.3) より，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}' \tag{I.5}$$

となることから，塑性流れの方向が偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ の方向と一致することがわかる．ゆえに，塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ を，$\dot{\gamma}$ を係数として以下のように表すことができる．

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma}\boldsymbol{\sigma}' \tag{I.6}$$

これは流れ理論における関連流れ則 (associated flow rule) であり，以降 γ を塑性乗数と呼称する．また，塑性ひずみ仕事率 $\dot{W}^{\mathrm{p}}$ について，以下の関係が成り立つと仮定する．

$$\dot{W}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \equiv \bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{I.7}$$

ここで $\bar{\sigma}$ は相当応力，$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ は相当塑性ひずみ速度である．式 (I.6) の両辺と $\boldsymbol{\sigma}$ の内積をとり，式 (I.7) の関係を用いて変形すると，以下の式を得る．

$$\dot{\gamma} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}} \tag{I.8}$$

なお，変形の際に以下の関係式を用いている．

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}') \tag{I.9}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}' \tag{I.10}$$

付録 II　リターンマッピングアルゴリズム

弾塑性モデルを用いた増分解析において，時刻 n から $n+1$ までの増分ステップを想定する．なお，下付き添え字 n，$n+1$ はそれぞれの時刻における諸量を表す．式 (I.2)，(I.6)，(I.8) を増分について表すと，

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{II.1}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \Delta\gamma\, \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} \tag{II.2}$$

$$\Delta\gamma = \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}_{n+1}} \tag{II.3}$$

となり，式 (II.2)，(II.3) を式 (II.1) に代入すると次式を得る．

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}_{n+1}}\, \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} \tag{II.4}$$

ここで，時刻 n において既知である項を試行応力として

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{II.5}$$

とおくと，リターンマッピングにおける試行応力と最終応力の関係式

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}\, \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} \tag{II.6}$$

を得る．ここで右肩添え字 (T)，(F) はそれぞれ試行応力，最終応力を表す．式 (II.5) は，弾性剛性テンソル $\mathbb{C}$ を用いて時刻 $n+1$ における試行応力を求めることを意味している．式 (II.6) より

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{\mathrm{n}+1}\right) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{\mathrm{n}+1}\right) \tag{II.7}$$

であるから，式 (II.6) はせん断弾性係数 G を用いて，以下のような偏差応力の関係式に書き換えられる．

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} - \frac{3}{2}\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}\, 2G\, \boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} \tag{II.8}$$

これを整理すると

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} + 3G\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{II.9}$$

となることから，最終偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を試行偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ のスカラー倍で表せることがわかる．さらに，偏差応力のノルムの比はその相当応力の比に等しいことから，

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1} = \frac{\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}}{\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1}}\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1} \tag{II.10}$$

とおくことができる．つまり，式 (II.10) は偏差応力空間において試行応力を半径方向に修正することで最終応力を得ることを意味する．式 (II.9) および式 (II.10) より，$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{T})}_{n+1}$ が $\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ と一致するための相当応力に関する条件式

$$\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} = \bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} + 3G\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{II.11}$$

を得る．ここで，塑性変形中の相当応力は降伏応力，すなわち硬化関数 $k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}\right)$ に一致するため，

$$\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1} = k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}\right) \tag{II.12}$$

とおける．また，時刻 $n+1$ における相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ はその増分 $\Delta\bar{\varepsilon}^{p}$ を用いて

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{II.13}$$

と表せる．よって，式 (II.12)，(II.13) を式 (II.11) に代入して整理すると

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{3G}\left\{\bar{\sigma}^{(\mathrm{T})}_{n+1} - k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right)\right\} \tag{II.14}$$

となり，未知変数が $\Delta\bar{\varepsilon}^{p}$ だけの方程式に縮約される．これを解くことで $\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ を求めることができるが，材料モデルに非線形硬化則を用いる場合は，Newton-Raphson 法などの反復計算によって求める必要がある．あとは，求めた $\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ を式 (II.11) に代入することで $\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が求まり，さらに $\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，$\bar{\sigma}^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ を式 (II.3)，(II.9) にそれぞれ代入することで $\Delta\gamma$，$\boldsymbol{\sigma}'^{(\mathrm{F})}_{n+1}$ が求められる．

付録 III　Consistent 弾塑性接線係数

ここでは，リターンマッピングで得られた諸量を用いて，後退型 Euler 積分のための consistent 接線係数 $\mathbb{C}^{\mathrm{ep}*}$ を求める手順を記述する．

まず，$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ となるような 4 階のテンソル $\mathbb{P}$ を導入して式 (II.1)，(II.2) を整理すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\gamma\,\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta\gamma\,\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1})\end{aligned} \tag{III.1}$$

を得る．この式について時刻 $n+1$ における微分をとると

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : \{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \Delta\gamma\,\mathbb{P} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\} \tag{III.2}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\mathbb{C}^{-1} + \Delta\gamma\,\mathbb{P}\right) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\mathbb{P} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{III.3}$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C}^{*} : \left\{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right\} \tag{III.4}$$

となる．ここで，$\mathbb{C}^{*} = \left(\mathbb{C}^{-1} + \Delta\gamma\,\mathbb{P}\right)^{-1}$ とおいた．次に，式 (II.12) についても同様に

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} &= \left.\frac{\partial k}{\partial\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}\right|_{n+1}\mathrm{d}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} \\ &= H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}\end{aligned} \tag{III.5}$$

となる．ここで $\left.\frac{\partial k}{\partial\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}\right|_{n+1} = H'_{n+1}$ とおいている．ちなみに，本研究のように線形硬化則を用いる場合，$H'_{n+1} = E^{\mathrm{h}}$ である．さらに，$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ は式 (II.3) および式 (II.13) を用いて

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \frac{2}{3}\Delta\gamma\,\bar{\sigma}_{n+1} \tag{III.6}$$

と表せるから，時刻 $n+1$ における微分をとると

$$\mathrm{d}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \frac{2}{3}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma\,\bar{\sigma}_{n+1}) + \frac{2}{3}\,\Delta\gamma\,\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} \tag{III.7}$$

となり，これを式 (III.5) に代入して

$$\left(1 - \frac{2}{3}\,H'_{n+1}\Delta\gamma\right)\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} = \frac{2}{3}\,H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\bar{\sigma}_{n+1} \tag{III.8}$$

$$\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} = \frac{2}{3}\,\eta\,H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\bar{\sigma}_{n+1} \tag{III.9}$$

を得る．ここで，$\gamma = \left(1 - \frac{2}{3}\,H'_{n+1}\Delta\gamma\right)^{-1}$ と置いた．

また，時刻 $n+1$ における偏差応力と相当応力の関係式は，式 (I.9) より

$$\bar{\sigma}^2_{n+1} = \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) \tag{III.10}$$

であるから，両辺を時刻 $n+1$ で微分して整理すると

$$\bar{\sigma}_{n+1}\,\mathrm{d}\,\bar{\sigma}_{n+1} = \frac{3}{4}\,\mathrm{d}\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) \tag{III.11}$$

$$= \frac{3}{2}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} \tag{III.12}$$

を得る．なお，ここで式 (I.10) の関係を用いて右辺の $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ の片方を $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ に置き換えていることに注意されたい．次に，式 (III.12) に式 (III.9) を代入して

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \frac{4}{9}\,\eta\,H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\bar{\sigma}^2_{n+1} \tag{III.13}$$

を得る．ここに式 (III.4) を代入すると

$$\frac{4}{9}\,\eta\,H'_{n+1}\,\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\bar{\sigma}^2_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \left[\mathbb{C}^* : \left\{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathrm{d}\,(\Delta\gamma)\,\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right\}\right] \tag{III.14}$$

となり，これを $\mathrm{d}\,(\Delta\gamma)$ について整理して

$$\mathrm{d}\,(\Delta\gamma) = \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : (\mathbb{C}^* : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})}{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) + \frac{4}{9}\,\eta\,H'_{n+1}\,\bar{\sigma}^2_{n+1}} \tag{III.15}$$

を得る．これを式 (III.4) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\
&= \mathbb{C}^* : \left\{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : (\mathbb{C}^* : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})}{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) + \frac{4}{9}\,\eta\,H'_{n+1}\,\bar{\sigma}^2_{n+1}}\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right\} \\
&= \left\{\mathbb{C}^* - \frac{\left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) \otimes \left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right)}{\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} : \left(\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\right) + \frac{4}{9}\,\eta\,H'_{n+1}\,\bar{\sigma}^2_{n+1}}\right\} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\
&\equiv \mathbb{C}^{\mathrm{ep}*} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}
\end{aligned} \tag{III.16}$$

となり，ここでおいた $\mathbb{C}^{\mathrm{ep}*}$ が consistent 弾塑性接線係数となる．

参考文献

1) Kato, J., Hoshiba, H., Takase, S., Terada, K., Kyoya, T.: Accuracy validation of analytical sensitivity in topology optimization for elastoplastic composites, *Struct. Multidisc. Optim.*, submitted, 2014.
2) Yuge, K., Kikuchi, N.: Optimization of a frame structures subjected to a plastic deformation, *Struct. Optim.*, Vol. 10, pp. 197–208, 1995.
3) Schwarz, S., Ramm, E.: Sensitivity analysis and optimization for non-linear structural response, *Engrg. Comput.*, Vol.18, No. 3/4, pp. 610-641,2001.
4) Maute, K., Schwarz, S., Ramm, E.: Adaptive topology optimization of elastoplastic structures, *Struct. Optim.*, Vol. 15, pp. 81–91, 1998.
5) Schwarz, S., Maute, K., Ramm, E.: Topology and shape optimization for elastoplastic structural response, *Comput. Appl. Mech. Engrg.* Vol.190, pp.2135-2155, 2001.
6) Choi K.K., Santos J.L.T.: Design sensitivity analysis of nonlinear structural systems Part I: Thoery, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, pp. 2039–2055, 1987.
7) Ohsaki M., Arora J.S.: Design sensitivity analysis of elastoplastic structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, pp. 737–762, 1994.
8) Bugeda, G., Gil, L., Oñate, E.: Structural shape sensitivity analysis for nonlinear material models with strain softening, *Struct. Optim.*, Vol. 17, pp. 162–171, 1999.
9) Hammer, V.B.: Optimal laminate design subject to single membrane loads, *Struct. Optim.*, Vol. 17, pp. 65–73, 1999.
10) Stegmann, J., Lund, E.: Discrete material optimization of general composite shell structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 62, pp. 2009–2027, 2005.
11) Gibiansky, L.V., Sigmund, O.: Multiphase composites with extremal bulk modulus, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, pp. 461–498, 2000.
12) Sigmund, O., Torquato, S.: Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No. 6, pp. 1037–1067, 1997.
13) Swan, C.C., Kosaka, I.: Voigt-Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behaviors, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 3785–3814, 1997.
14) Bogomolny, M., Amir, O.: Conceptual design of reinforced concrete structures using topology optimization with elastoplastic material modeling, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 90, pp. 1578–1597, 2012.
15) Kato, J., Lipka, A. and Ramm, E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 39, pp. 63–81, 2009.
16) Kato, J., Ramm, E.: Multiphase layout optimization for fiber reinforced composites considering a damage model, *Eng. Struct.*, 49, pp. 202–220, 2013.
17) Amir, O.: A topology optimization procedure for reinforced concrete structures, *Comput. and Struct.* , 114-115, pp. 46–58, 2013.
18) Patnaik, S.N., Guptill, J.D. and Berke, L.: Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 3087–3120, 1995.
19) Kleiber, M., Antúnez, H., Hien, T.D., Kowalczyk, P.: Parameter sensitivity in nonlinear mechanics, *John Wiley & Sons*, Chichester, England, UK, 1997.
20) Kleiber, M., Kowalczyk, P.: Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 137, pp. 395–409, 1996.
21) Zhang, Y., Kiureghian, A. Der.: Dynamic response sensitivity of inelastic structures, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 108, pp. 23–36, 1993.
22) Hisada, T.: Recent Progress in Nonlinear FEM-Based Sensitivity Analiysis, *JSME International Journal,* Series A, Vol.38, No.3, pp.301-310, 1995.
23) Zhou, M. and Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 89, pp. 309–336, 1991.

(2014. 6. 20 受付)

MULTIPHASE TOPOLOGY OPTIMIZATION CONSIDERING ELASTOPLASTIC CYCLIC DEFORMATION AND ACCURACY VALIDATION OF ANALYTICAL SENSITIVITY

Hiroya HOSHIBA, Junji KATO, Shinsuke TAKASE,
Kenjiro TERADA and Takashi KYOYA

The present study introduces a derivation of analytical sensitivity for topology optimization of composites considering elastoplastic deformation to maximize the energy absorption capacity under a prescribed material volume. For optimization applying a gradient-based method, the accuracy of sensitivities is critical to obtain a reliable optimization result, especially in the vicinity of undifferentiable points such as yield points and unloading starting points in the stress–strain curve. In the previous authors' work[1)], it is verified that the proposed analytical sensitivity can provide highly accurate sensitivities over yield points under loading situation. In this study, as an extension to a more realistic loading situation, we demonstrate topology optimization under cyclic loading condition and verify the accuracy of the proposed sensitivity approach by comparing with that evaluated from the finite difference approach.