土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 70, No. 2 (応用力学論文集 Vol. 17), I_307-I_315, 2014.

安定化有限要素法を用いた 2D-3Dハイブリッド手法による津波解析

高瀬慎介[1]・加藤準治[2]・森口周二[3]・寺田賢二郎[4]・京谷孝史[5]・
野島和也[6]・桜庭雅明[7]・樫山和男[8]

[1]正会員　東北大学災害科学国際研究所（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: takase@irides.tohoku.ac.jp
[2]正会員　東北大学災害科学国際研究所（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: jkato@irides.tohoku.ac.jp
[3]正会員　東北大学災害科学国際研究所（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: s_mori@irides.tohoku.ac.jp
[4]正会員　東北大学災害科学国際研究所（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: tei@irides.tohoku.ac.jp
[5]正会員　東北大学大学院工学研究科（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: kyoya@civil.tohoku.ac.jp
[6]正会員　日本工営株式会社 中央研究所（〒 300-1259 茨城県つくば市稲荷原 2304）
E-mail: a7385@n-koei.co.jp
[7]正会員　日本工営株式会社 中央研究所（〒 300-1259 茨城県つくば市稲荷原 2304）
E-mail: sakuraba-ms@n-koei.jp
[8]正会員　中央大学理工学部都市環境学科（〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27）
E-mail: kaz@civil.chuo-u.ac.jp

本論文では，震源域から発生した津波の沖合領域での伝播から都市域での遡上に至る一連の挙動を，精度良く且つ低い計算コストで予測可能な，2D-3D ハイブリッド安定化有限要素法を提案する．具体的には，沖合での波の伝播には 2 次元（2D）浅水長波方程式を，遡上領域では 3 次元（3D）Navier-Stokes 方程式を支配方程式に採用し，それぞれの解析領域に対して個別の非構造メッシュを用いて安定化有限要素法により離散化する．そして，これらの空間次元だけでなく節点配置も異なるメッシュ間で流速と圧力の連続条件を多点拘束（MPC）法により満足させることで，完全な 3D 解析に比べて格段に低い計算コストで，沖合から都市域に至る一連の津波伝播・遡上現象を解析可能とした．

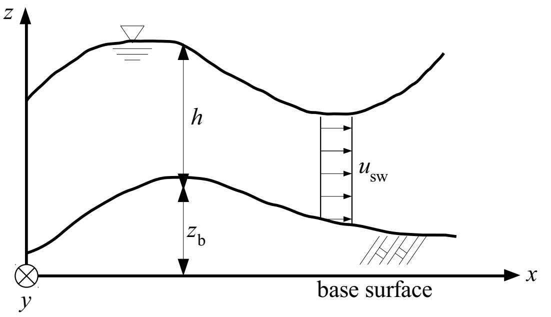
Key Words : *2D-3D Hybrid Simulation, Stabilized Finite Element Method, Multiple-Point Constraints*

1. はじめに

津波，高潮，洪水氾濫などによる浸水災害が数多く報告されている．これらの浸水災害は，人間の生命・財産に直接的に影響を与えるため，時系列の浸水範囲を予測することは工学上重要である．浸水範囲の予測には，かつては模型実験が主流であったが，近年では計算機性能の向上および数値解析技術の高精度化，さらには，高精度な地形および住宅に関する数値地図の整備・普及により，数値シミュレーションを用いた浸水範囲の被害予測が主流になりつつある[1),2),3)]．

なかでも津波遡上シミュレーションにおいては，沖合での津波の伝播から陸域の遡上までの広範囲を取り扱う必要があるが，簡易さと計算コストの観点から，直交格子を用いた浅水長波理論に基づく手法が広く用いられている[4),5),6)]．しかし，遡上領域である都市部では，構造物や地形の影響により 3 次元性の高い複雑な自由表面流れとなるため，構造物に作用する流体力の評価を目的とする場合には，浅水長波近似の適用が不適切であることは自明である．そのため近年では，複雑な自由表面流れに対しても適用が可能な Navier-Stokes 方程式に基づく解析も行われている[7),8)]，沖合から遡上域までの 3 次元解析は計算自由度の増大が必至であり，計算コストの観点から現実的とはいえない．

このような問題に対応するため，2 次元（2D）と 3 次元（3D）のハイブリッド手法が提案されている[9),10),11)]．この手法は，浅水長波の 2D 解析の結果を反映させながら，津波防波堤や構造物周りなどの 2D 近似が成立しない場所に対して，3D 解析ができるような工夫をしている．しかし，これまで提案されてきた手法の多くは，2D，3D 領域ともに直交格子の利用を前提としているため，構造物の表現には影響体積率（空隙率）を用いるなどの近似を導入せざるを得ない．構造物に作用する流体力を適切に評価するためには, 周辺の流況を精度よ



図–1 浅水長波問題における座標系

く解析する必要があり，構造物の形状を正確に表現できる適合格子を用いた手法の導入が必要である．

そこで本論文では，津波遡上解析を目的として，非構造格子を用いることが可能な 2D-3D ハイブリッド安定化有限要素法を提案する．沖合での波の伝播には 2D 浅水長波方程式を用いて，その有限要素離散化には SUPG 法を適用する．一方，遡上津波には 3D Navier-Stokes 方程式 を用いて，SUPG/PSPG 法を適用して離散化するとともに，自由表面位置を捕捉するために VOF 法を採用する．また，2D 領域に三角形要素を，3D 領域に四面体要素を用いるため，構造物の形状に適合した要素分割を行うことが可能となり，形状表現に起因した誤差を低減できる．2D-3D 領域の界面における流速と圧力の連続性を満足させるために，多点拘束（MPC）法[12] を採用する．これにより，2D と 3D の領域でのメッシュ分割を個別に行って，両メッシュの界面での節点配置が適合しない場合でも対応可能とした．次章以降で，支配方程式とその離散化について述べた後，本研究で新たに導入した 2D-3D ハイブリッド安定化有限要素法のための MPC 法について詳しく説明する．最後に，潜堤周りの波動伝搬問題および遡上域に構造物を有する津波遡上問題などに対する数値解析例を通して，本手法の解析精度や適用性について検証を行う．

2. 安定化有限要素法

本節では，3 次元流れ場と浅水長波流れ場の支配方程式に対して，安定化有限要素法を適用して得られる離散化方程式を示す．また，前者の 3 次元流れ場における自由表面の捕捉手法には VOF 法を採用することとし，その離散化についても概説する．なお，すべての支配方程式の時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用することにする．

(1) 支配方程式

都市域の 3 次元的な流れの場を表現するために，次の非圧縮粘性流体の Navier-Stokes 式と連続式を支配方程式として採用する．

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\right) - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) = 0 \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2}$$

ここで，ρ は密度，$\boldsymbol{u} = [u_{ns}, v_{ns}, w_{ns}]^{\mathrm{T}}$ は流速ベクトル，p は圧力，$\boldsymbol{f}$ は物体力ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルである．また，Newton 流体を仮定し，構成則には次式を用いる．

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \tag{3}$$

ここで，μ は粘性係数であり，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ は次式で定義される変形速度テンソルである．

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\right) \tag{4}$$

一方，沖合から遡上直前までの津波の伝搬挙動についての支配方程式には，浅水長波の仮定に基づく浅水長波方程式を採用する．非保存型の場合，非保存変数を $\boldsymbol{U} = [h, u_{sw}, v_{sw}]^{\mathrm{T}}$ とおくと，浅水長波方程式は次式で与えられる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}_\alpha\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\boldsymbol{K}_{\alpha\beta}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x_\beta}\right) - \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

ここで，$\alpha, \beta = 1, 2$ については総和規約を適用する．式中の h は全水深，u_{sw} および v_{sw} はそれぞれ平均流速の各方向成分を示す（**図-1** 参照）．また，$\boldsymbol{A}_\alpha$ は移流項を表すマトリックス，$\boldsymbol{K}_{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{R}$ は，それぞれ次のように定義した．

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} u_{sw} & h & 0 \\ g & u_{sw} & 0 \\ 0 & 0 & u_{sw} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} v_{sw} & 0 & h \\ 0 & v_{sw} & 0 \\ g & 0 & v_{sw} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{K}_{11} = \nu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_{12} = \nu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{K}_{21} = \nu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_{22} = \nu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\dfrac{\partial z_b}{\partial x} - \dfrac{u_*}{h}u_{sw} \\ -g\dfrac{\partial z_b}{\partial y} - \dfrac{u_*}{h}v_{sw} \end{bmatrix},\ u_* = \frac{gn^2\sqrt{u_{sw}^2 + v_{sw}^2}}{h^{1/3}} \tag{9}$$

ここで，g は重力加速度，ν は渦動粘性係数，z_b は底面の高度，n はマニングの粗度係数である．

(2) 安定化有限要素法

3 次元流れ場の支配方程式 (1), (2) に対して SUPG/PSPG 法[13),14)] を適用すると，次式のような安定

化有限要素法による離散化方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\rho \int_{\Omega_{\rm ns}} & \boldsymbol{w}^h \cdot \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^h}{\partial t} + \boldsymbol{u}^h \cdot \nabla \boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{f} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega_{ns}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^h, p^h)\, d\Omega + \int_{\Omega_{\rm ns}} q^h \nabla \cdot \boldsymbol{u}^h\, d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\rm el}} \int_{\Omega_{ns}^e} \left\{ \tau_{\rm supg}^{\rm ns} \boldsymbol{u}^h \cdot \nabla \boldsymbol{w}^h + \tau_{\rm pspg}^{\rm ns} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\
& \qquad \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^h}{\partial t} + \boldsymbol{u}^h \cdot \nabla \boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^h, p^h) \right\} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\rm el}} \int_{\Omega_{ns}^e} \tau_{\rm cont}^{\rm ns} \nabla \cdot \boldsymbol{w}^h \rho \nabla \cdot \boldsymbol{u}^h\, d\Omega = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ここで，$\Omega_{\rm ns} \in \mathbb{R}^3$ は Navier-Stokes 方程式の解析領域を，$n_{\rm el}$ は要素数であり，$\boldsymbol{u}^h$，p^h は，それぞれ速度と圧力の有限要素近似式，$\boldsymbol{w}^h$，q^h は，それぞれ運動方程式と連続式に対する重み関数の近似式である．式中に第 4 項は移流の卓越に対して安定化を施す SUPG 項，および圧力振動を回避するための PSPG 項であり，第 5 項は自由表面の数値不安定性を回避するための衝撃捕捉（Shock-Capturing) 項 [15] である．また，$\tau_{\rm supg}^{\rm ns}$，$\tau_{\rm pspg}^{\rm ns}$，$\tau_{\rm cont}^{\rm ns}$ は，すべて安定化パラメータであり，各安定化項の係数としてそれぞれ次のように定義される．

$$
\tau_{\rm supg}^{\rm ns} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\boldsymbol{u}^h\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{11}
$$

$$
\tau_{\rm pspg}^{\rm ns} = \tau_{\rm supg}^{\rm ns} \tag{12}
$$

$$
\tau_{\rm cont} = \frac{h_e}{2} \|\boldsymbol{u}^h\| \xi({\rm Re}_e) \tag{13}
$$

$$
{\rm Re}_e = \frac{\|\boldsymbol{u}^h\| h_e}{2\nu} \tag{14}
$$

$$
\xi({\rm Re}_e) = \begin{cases} \dfrac{{\rm Re}_e}{3}, & {\rm Re}_e \le 3 \\ 1, & {\rm Re}_e > 3 \end{cases} \tag{15}
$$

ここで，Δt は時間増分，h_e は要素の代表長さ，ν は動粘性係数，${\rm Re}_e$ は要素レイノルズ数である．

一方，浅水長波方程式 (5) に対して SUPG 法 [16] を適用すると，次式のような安定化有限要素法による離散化方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\rm sw}} & \boldsymbol{U}_*^h \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}^h}{\partial t} + \boldsymbol{A}_\alpha^h \frac{\partial \boldsymbol{U}^h}{\partial x_\alpha} - \boldsymbol{R}^h \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega_{\rm sw}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}_*^h}{\partial x_\alpha} \right) \cdot \left(\boldsymbol{K}_{\alpha\beta}^h \frac{\partial \boldsymbol{U}_*^h}{\partial x_\beta} \right) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\rm el}} \int_{\Omega_{\rm sw}^e} \tau_{\rm supg}^{\rm sw} \left(\boldsymbol{A}_\beta^h \right)^{\rm T} \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}_*^h}{\partial x_\beta} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}^h}{\partial t} + \boldsymbol{A}_\alpha^h \frac{\partial \boldsymbol{U}^h}{\partial x_\alpha} - \boldsymbol{R}^h \right) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\rm el}} \int_{\Omega_{\rm sw}^e} \tau_{\rm cont}^{\rm sw} \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}_*^h}{\partial x_\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}^h}{\partial x_\alpha} \right) = 0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ここで，$\Omega_{\rm sw} \in \mathbb{R}^2$ は浅水長波方程式の解析領域を表し，$\boldsymbol{U}^h$，$\boldsymbol{A}_\alpha^h$，$\boldsymbol{K}_{\alpha\beta}^h$，$\boldsymbol{R}_\alpha^h$ $(\alpha, \beta = 1,\ 2)$ は，それらの成分内の速度場 $u_{\rm sw}$，$v_{\rm sw}$ が有限要素離散化されていることを表しており，$\boldsymbol{U}_*^h$ は $\boldsymbol{U}$ の重み関数 $\boldsymbol{U}_*$ の有限要素近似である．

この式中の第 3 項は，移流の卓越に対する安定化を施す SUPG 項，第 4 項は自由表面の数値不安定性を回避するための衝撃捕捉項 [17),18] である．また，$\tau_{\rm supg}^{\rm sw}$，$\tau_{\rm cont}^{\rm sw}$ は安定化パラメータであり，それぞれ次式のように定義されている．

$$
\tau_{\rm supg}^{\rm sw} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\vec{\boldsymbol{u}}^h\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{17}
$$

$$
\tau_{\rm cont}^{\rm sw} = \frac{h_e}{2} \|\vec{\boldsymbol{u}}^h\|\, z \tag{18}
$$

$$
z = \begin{cases} \dfrac{\kappa_k}{3}, & \kappa_k \le 3 \\ 1, & \kappa_k > 3 \end{cases} \tag{19}
$$

ここで，$\|\vec{\boldsymbol{u}}^h\| = \sqrt{\|\boldsymbol{u}_{sw}^h\|^2 + c^2}$，$c = \sqrt{gh}$，$\kappa_k = \|\vec{\boldsymbol{u}}^h\| h_e / \nu$，$\boldsymbol{u}_{sw}^h = [u_{sw}, v_{sw}]^T$ と定義した．

(3) VOF 法による界面捕捉

式 (1)，(2) を支配方程式とする液体（水）の 3 次元流れ場における自由表面と気体（空気）との界面位置の表現方法は，固定メッシュを用いた Euler 的手法である界面捕捉法 [15),19] と移動メッシュを用いた Lagrange 的手法である界面追跡法 [20),21] の二つに分類することができる．本研究では，砕波等の複雑な自由表面形状を表現を必要とすることから，それに適した界面捕捉法の一つである VOF 法 [15] を採用することにする．

VOF 法では，次式で表される移流方程式を解くことで自由表面位置を決定する．

$$
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi = 0 \tag{20}
$$

ここで，ϕ は VOF 関数（界面関数）を表し，気体であれば 0.0，液体であれば 1.0，自由表面上であれば 0.5 をとるものとする．そして，各要素における流体の密度 ρ と粘性係数 μ は，液体（水）と気体（空気）の密度 $\rho_{\rm l}$, $\rho_{\rm g}$ と粘性係数 $\mu_{\rm l}$, $\mu_{\rm g}$，VOF 関数 ϕ を用いて次式のように求められる．

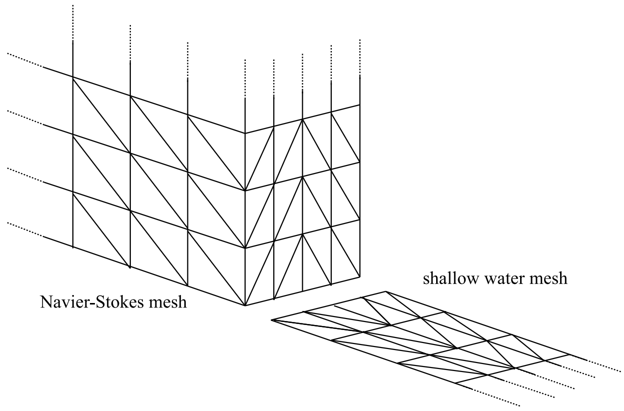
$$
\rho = \rho_{\rm l} \phi + \rho_{\rm g}(1 - \phi) \tag{21}
$$

$$
\mu = \mu_{\rm l} \phi + \mu_{\rm g}(1 - \phi) \tag{22}
$$

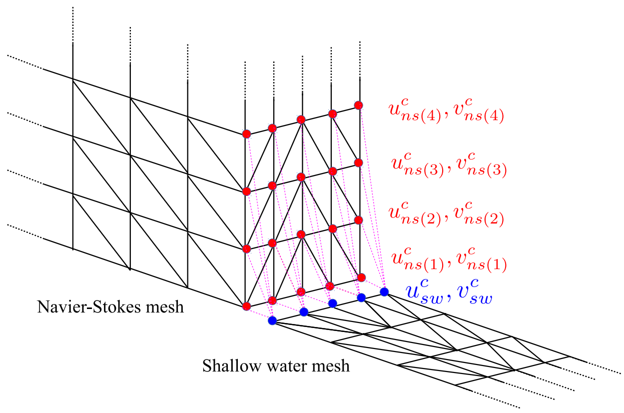
VOF 法の支配方程式 (20) に対して，SUPG 法 [15] に基づく安定化有限要素法を適用すると以下のような離散化方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{ns}} & \phi_*^h \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \boldsymbol{u}^h \cdot \nabla \phi \right) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\rm el}} \int_{\Omega_{\rm ns}^e} \tau_\phi\, \boldsymbol{u}^h \cdot \nabla \phi_*^h \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \boldsymbol{u}^h \cdot \nabla \phi^h \right) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n} \int_{\Omega_{\rm ns}^e} \tau_{\rm IC}\, \nabla \cdot \phi_*^h \nabla \cdot \phi^h\, d\Omega = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

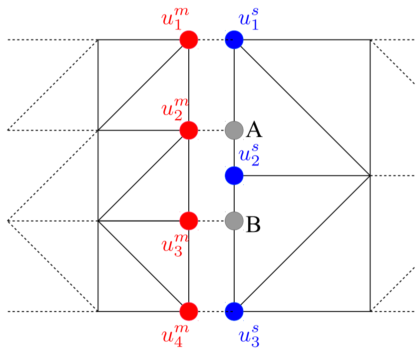
ここで，ϕ^h および ϕ_*^h は，VOF 関数 ϕ とその重み関数の有限要素近似式である．また，τ_ϕ，$\tau_{\rm IC}$ は安定化パラ



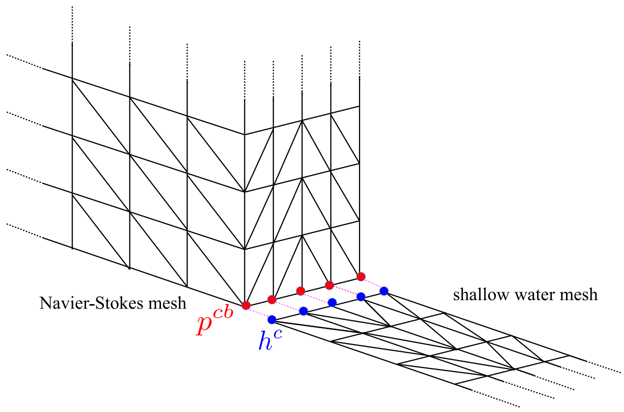
図–2 解析領域の結合部



図–3 適合メッシュ間の流速の MPC 条件



図–4 非適合メッシュ間の MPC 条件



図–5 水位の MPC 条件

メータであり，次式で定義されている．

$$\tau_\phi = \left[\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\boldsymbol{u}^h\|}{h_e}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{24}$$

$$\tau_{\mathrm{IC}} = \frac{h_e}{2}\|\boldsymbol{u}^h\| \tag{25}$$

また，Aliabadi ら [15] によって提案された手法を導入して，求められた ϕ^h による界面が鋭敏化され，液体体積が保存されるような処置を行う．

なお，離散化方程式 (23) は，次章で述べる拘束条件により，一体化した式 (10) と式 (16) により求められた流速を移流速度として次のステップの自由表面の位置を算定する．

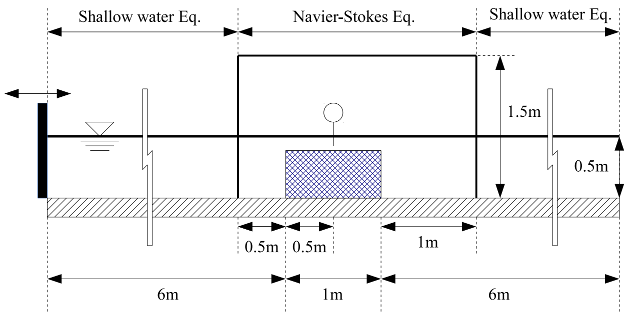
3. 2D-3D ハイブリッド手法

本研究では，沖合の領域（Ω_{sw}）の流れ場については 2 次元（2D）浅水長波方程式を，都市域（Ω_{ns}）の遡上津波については 3 次元（3D）Navier-Stokes 方程式（および連続式）を支配方程式として，安定化有限要素法により解析を行うための 2D-3D ハイブリッド手法を提案する．そのためには，それぞれの領域 Ω_{sw}，Ω_{ns} で方程式の定義域の次元が異なるだけでなく，節点の位置も整合しないことを許容しても速度や圧力の連続性が満たさせるような条件を付与する必要がある．本研究では，時間方向の離散化には陰解法を採用しているため，それぞれの境界面の接合において多点拘束，すなわち MPC（Multiple-Point Constraints）条件 [12] を適用した 2D-3D のハイブリッド手法を構築する．MPC 条件を用いるため，既存のそれぞれの離散化方程式を用いることができる．そのため，解析の流れは，大きく変更する必要がないのも本手法のメリットの 1 つである．

(1) *xy* 方向の流速と圧力に関する拘束条件

まず，**図-2** に示すように，両領域の有限要素メッシュで節点位置が一致する場合を考える．このとき，領域 Ω_{sw} と Ω_{ns} は，それぞれ 2D と 3D メッシュで離散化されるが，両メッシュ境界において速度と圧力が適合しなければならない．すなわち，二つの領域が接している表面の節点（**図-3**）において，Ω_{sw} 内のある節点の x, y 方向の流速が，Ω_{ns} 内の同じ x, y 座標を有する水深方向（z 方向）の全節点の x，y 方向の流速と等しくなるように，次の多点拘束（MPC）条件を課す．

$$\begin{cases} u^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ns}(k)} &= u^{\mathrm{c}}_{\mathrm{sw}} \quad (k = 1, \cdots, N^{\mathrm{c}}_z) \\ v^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ns}(k)} &= v^{\mathrm{c}}_{\mathrm{sw}} \quad (k = 1, \cdots, N^{\mathrm{c}}_z) \end{cases} \tag{26}$$



図–6 解析モデル

ここで，N_z^{c} は，Ω_{ns} 内の同じ x, y 座標を有する水深方向（z 方向）の全節点数，$u^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ns}(k)}$，$v^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ns}(k)}$ は，Ω_{ns} における結合する面上の（同一の x, y 座標を有する）節点の流速，$u^{\mathrm{c}}_{\mathrm{sw}}$，$v^{\mathrm{c}}_{\mathrm{sw}}$ は Ω_{sw} の結合する面上の節点の平均流速である．

次に，**図-4** に示すように，両領域の有限要素メッシュで節点位置が一致しない場合について考える．領域 Ω_{sw}, Ω_{ns} 間で節点座標が一致していないため，互いの位置関係から圧力や流速の連続条件を与えることにする．例えば，**図-4** 中を参照して，Ω_{ns} 内の節点 2 の流速 u_2^{ns} に着目する．この節点 2 は，Ω_{sw} の点 A に位置するものとすると，u_2^{ns} は Ω_{sw} の節点 1 の流速 u_1^{sw} と節点 2 の流速 u_2^{sw} を用いて次のように補間近似できる．

$$u_2^{\mathrm{m}} = N_1^e(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})u_1^{\mathrm{s}} + N_2^e(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})u_2^{\mathrm{s}} \tag{27}$$

ここで，$N_1^e(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$，$N_2^e(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ は，Ω_{sw} 内の節点 1，2 間の線要素の形状関数を，点 A の x,y 座標値 $(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ で評価した値である．この式を MPC 条件式として有限要素方程式に反映させれば良い．

一方，Ω_{ns} の界面上での節点の圧力は，流速に応じて定められるが，領域 Ω_{sw} の Ω_{ns} との界面上の節点における全水深 h^{c} が既定されなければならない．そのため，**図-5** に示すように領域 Ω_{ns} の底部における Ω_{sw} との界面上の節点での圧力値 p^{cb} を用いて以下の拘束条件を課すことにする．

$$p^{\mathrm{cb}} = \rho g h^{\mathrm{c}} \tag{28}$$

(2) Ω_{ns} の Ω_{sw} との界面における z 方向流速の境界条件

浅水長波方程式の流速は鉛直方向に一様分布すると仮定され，z 方向流速（w_{sw}）変数は算出されない．したがって，Ω_{ns} の Ω_{sw} との界面における z 方向流速（$w^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ns}}$）を境界条件として既定できないことになる．

そこで本研究では，Ω_{sw} における z 方向流速（w_{sw}）を，次式で与えられる自由表面の運動学的境界条件より算定する．

表–1 入射波の条件

	波高 [cm]	周期:T [s]	境界面の節点
case1	2.5	2.0	一致する
case2	4.5	2.0	一致する
case3	4.0	1.0	一致する
case4	4.5	2.0	一致しない

$$w_{\mathrm{sw}} = \frac{\partial}{\partial t}(h + z_{\mathrm{b}}) + u_{\mathrm{sw}}\frac{\partial}{\partial x}(h + z_{\mathrm{b}}) + v_{\mathrm{sw}}\frac{\partial}{\partial y}(h + z_{\mathrm{b}}) \tag{29}$$

この式中の x, , y , z 方向の流速と水深の有限要素近似式を，それぞれ u^h_{sw}, v^h_{sw}, w^h_{sw}, h^h とおくと，対応する有限要素方程式は次式のようになる．

$$\int_{\Omega_{\mathrm{sw}}} \psi^h w^h_{\mathrm{sw}} d\Omega = \int_{\Omega_{sw}} \psi^h \left(\frac{\partial}{\partial t}(h^h + z^h_{\mathrm{b}})\right) d\Omega + \int_{\Omega_{\mathrm{sw}}} \psi^h \left(u^h_{\mathrm{sw}}\frac{\partial}{\partial x}(h^h + z^h_{\mathrm{b}}) + v^h_{\mathrm{sw}}\frac{\partial}{\partial y}(h^h + z^h_{\mathrm{b}})\right) d\Omega \tag{30}$$

ここで，ψ^h は重み関数の有限要素近似である．実際の解析では，有限要素離散化方程式 (10) と (16) を，上で与えた多点拘束条件式を満たすように各時間ステップで解き，得られた流速 u^h_{sw}, v^h_{sw} と全水深 h^h の節点値を式 (30) の右辺データとして用いて，w^h_{sw} の節点値を算出する．ただし，その時間ステップに先立って式 (30) を解いておき，その解である Ω_{ns} と Ω_{sw} との界面上での節点値 $w^{\mathrm{c}}_{\mathrm{sw}}$ が，Ω_{ns} 側の z 方向流速の節点値 $w^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ns}}$ と一致する条件 $w^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ns}} = w^{\mathrm{c}}_{\mathrm{sw}}$ をディレクレ境界条件として式 (10) に与える．

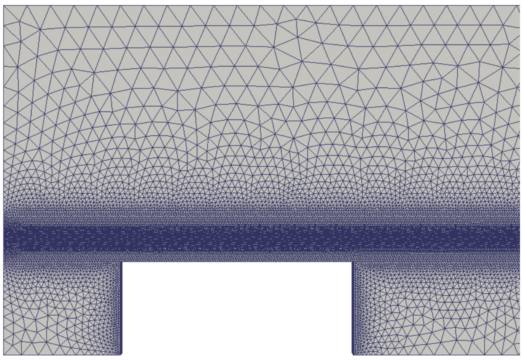
以上の方法により，2 次元浅水長波方程式と 3 次元 Navier-Stokes 方程式の解析領域を同時に解析が可能となる．ただし，それぞれの領域の接合には，2D 近似が成立している領域に設置しなければならない．

4. 数値解析例

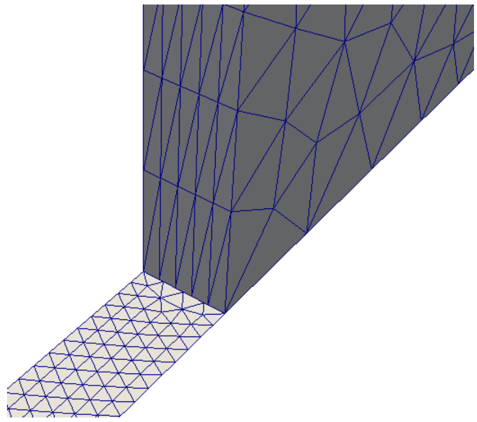
数値解析例として，まず潜堤周辺の波動問題を取り上げ，数値解と実験値を比較することで本手法の精度を検証する．次に，実問題への適用性に関する予備的検討として，構造物を有する遡上域について津波遡上解析を行う．

(1) 潜堤周りの波動解析

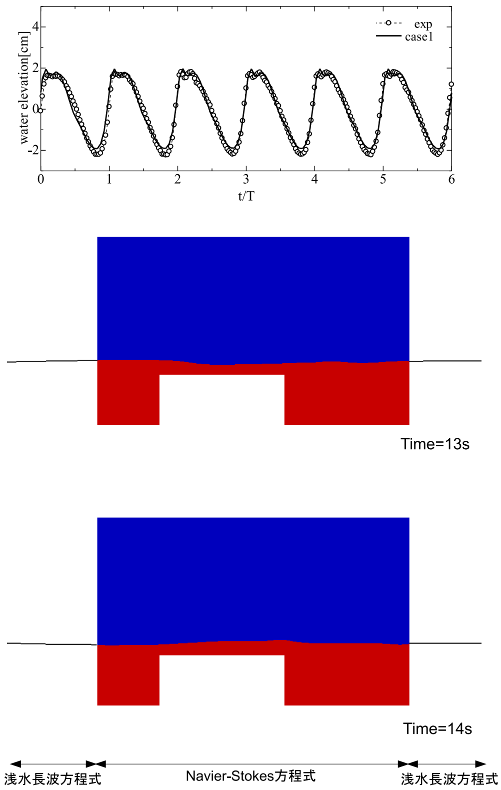
本手法の解析精度を検証するため，潜堤周りの波動解析[22),23)]を行う．解析対象は，**図-6** に示すような長さ 13 m，水深 0.5m，幅 0.05 mの数値水槽に沖から 6 m の位置に長さ 1.0 m × 高さ 0.4 m × 幅 0.05 mの潜堤を設置し，沖側から入射波を与えるものである．潜堤周辺を 3 次元の Navier-Stokes 方程式を支配方程式とする



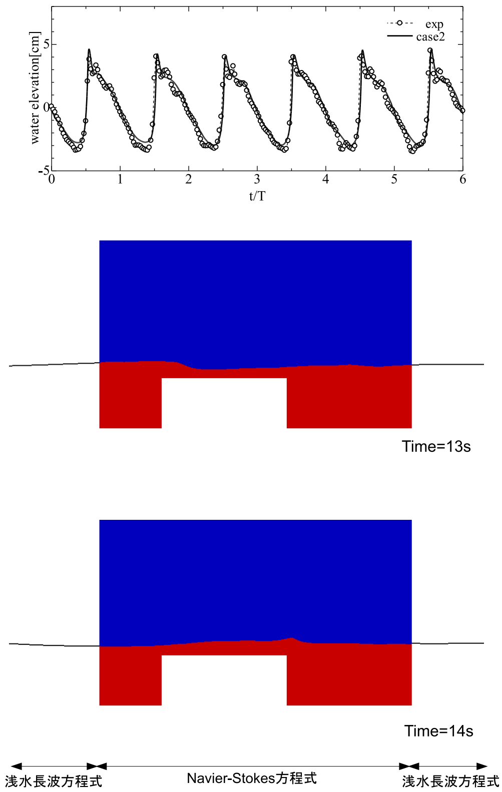
図–7 潜堤周辺における有限要素分割図



図–8 case4 における接合境界における有限要素分割の拡大図



図–9 case1 における実験値との比較と各時刻における水面形状

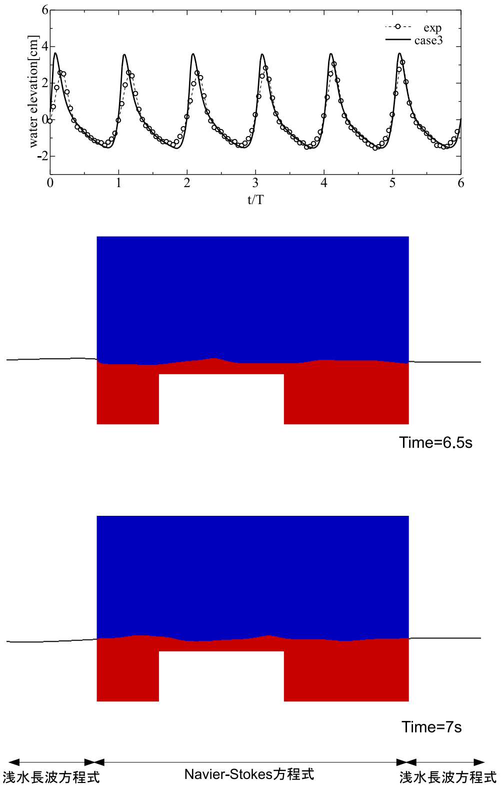


図–10 case2 における実験値との比較と各時刻における水面形状

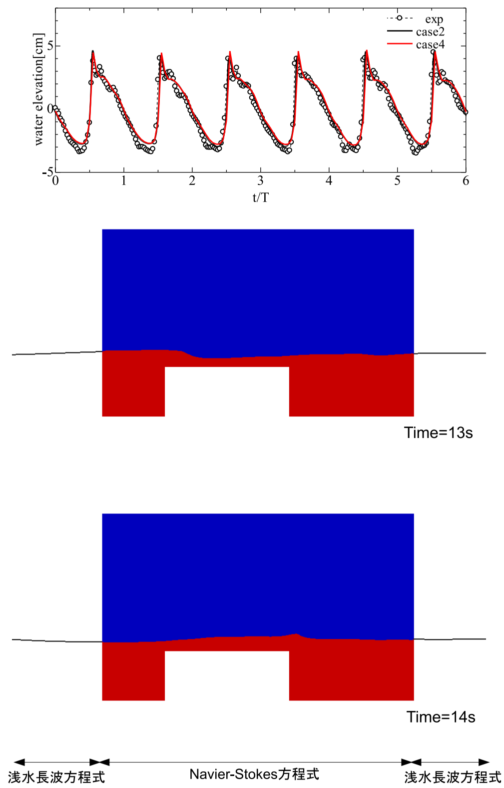
領域とし，他の領域は浅水長波方程式で支配される流れ場として解析を行う．

入射波の条件は，**表–1** に示す 4 ケースである．case1 から case3 で用いた有限要素分割図を **図-7** に，case4 で用いた 2D-3D 領域の接合部の有限要素分割の拡大図を **図-8** に示す．これらの図に示されているように，潜堤付近と自由表面周辺に対して要素が細かくなるような非構造格子を用いており，自由表面付近では最小要素長が 0.005 m になるようにメッシュを生成した．仮に，潜堤付近の 3 次元領域と同様なメッシュ分割方法で全解析領域の 3 次元メッシュを作成した場合，解析自由度は 5 倍以上になる．このことからも本手法は低コストで計算が可能であることがわかる．また，水路底面，側面には slip 条件を与え，潜堤壁面には no-slip 条件を与えた．

解析結果として，**図-9** から **図-12** に潜堤中央部において観測された水位変動量の時刻歴と中央断面での各時刻における水面形状を実験値と比較して示す．これらの図より，解析結果は実験値 [22),23)] とも良い一致を示していることがわかる．潜堤周辺の水面形状とともに，2D-3D 領域の接合箇所の波形にも乱れは観察されず，安定的に解析が行われていることがわかる．また，



図–11 case3 における実験値との比較と各時刻における水面形状



図–12 case4 における実験値との比較と各時刻における水面形状

図-12 の case4 は，2D-3D 領域の接合部の節点が一致しない（非適合である）が，同じ入力条件で接合部の節点が連続している case2 とよい一致を示している．これらの結果から，本手法は 2D-3D 領域を含む問題に対しても安定かつ高精度に解析が行えることが確認できた．

(2) 構造物を有する津波遡上解析

本手法の実問題への適用性に関する予備的検討として，都市域に構造物おいて津波遡上を模擬した解析を行う．解析領域は **図-13** に示す．沖合から 120m の部分を浅水長波方程式の領域，潜堤と陸上構造物を配置した領域は 3 次元の Navier-Stokes 方程式の領域とした．解析条件として，沖合境界に幅 50m，水位 5m の水柱を設定し，自由崩壊により波を発生させた．底面，側面，防波堤には slip 条件を，潜堤，構造物には no-slip 条件を与えた．潜堤から構造物までの遡上域において最小の要素長が 0.5m 程度になるように非構造格子を用いてメッシュを作成した．構造物付近の有限要素分割の様子を **図-14** に示す．また，比較対象として潜堤がない場合の解析も行った．

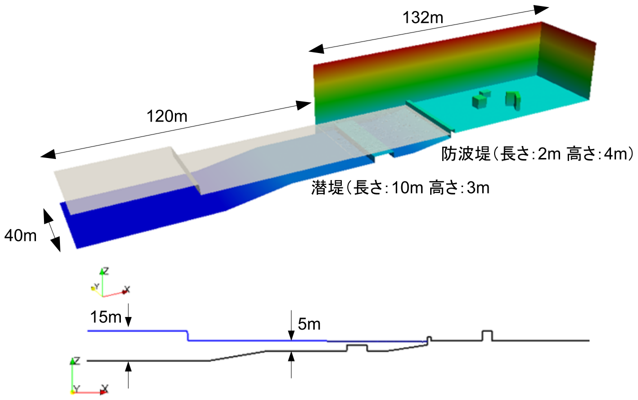
解析結果として，**図-15** と **図-16** に，それぞれに潜堤がある場合とない場合の遡上解析結果を示す．潜堤があることで，遡上域への浸水到達時間が遅れることが再現されている．また，非構造格子を用いて構造物周りの形状に適合した要素分割を行っているため，構造物周辺の流れも安定に解析が行われている．以上より，3 次元性を有する津波遡上を模擬した解析においても，本手法の有効性が確認できた．

5. おわりに

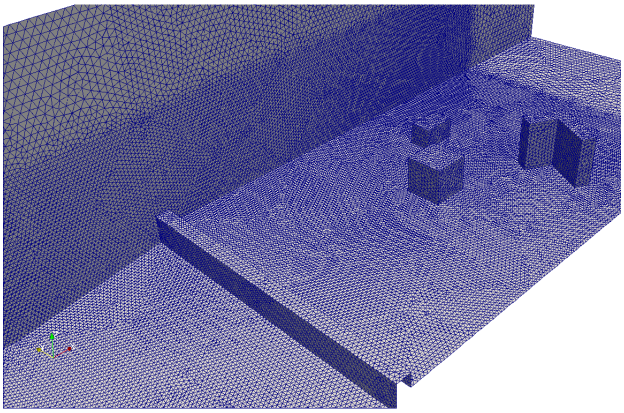
本研究では，高精度かつ低計算コストで津波遡上解析を行うための 2D-3D ハイブリッド安定化有限要素法を提案した．沖合での波の伝播には浅水長波方程式を，遡上領域には 3 次元 Navier-Stokes 方程式を用いた．3D 領域における自由表面の捕捉には VOF 法を適用した．2D と 3D の解析領域は非構造メッシュで個別に分割し，MPC 条件を導入することで，節点位置が適合しない場合であっても界面での流速と圧力の連続条件を満たされるようにした．

数値解析例では，潜堤周りの波動伝播問題と構造物を有する津波遡上問題を取り上げ，本手法の計算精度および有効性を確認した．得られた結論を以下に挙げておく．

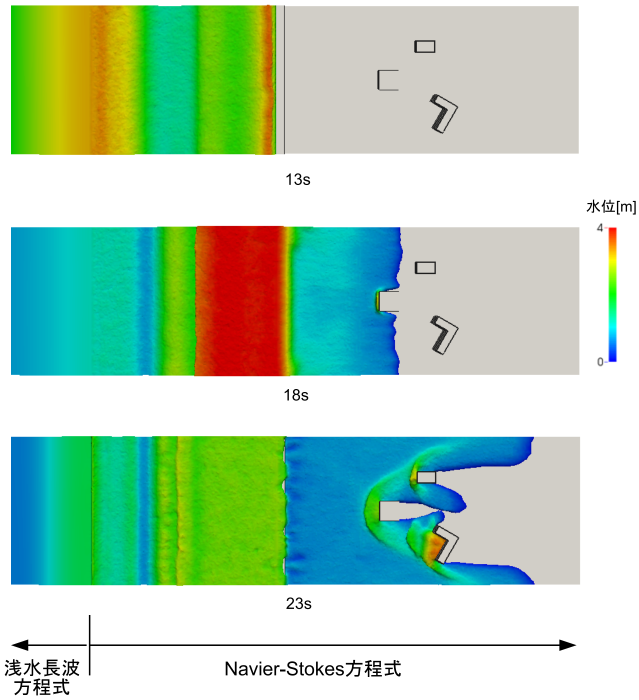
- 潜堤周りの波動解析において，本手法は実験値ともよい一致を示したことから，2D-3D 領域を含む問題に対しても安定かつ高精度に解析が可能であることを示した．



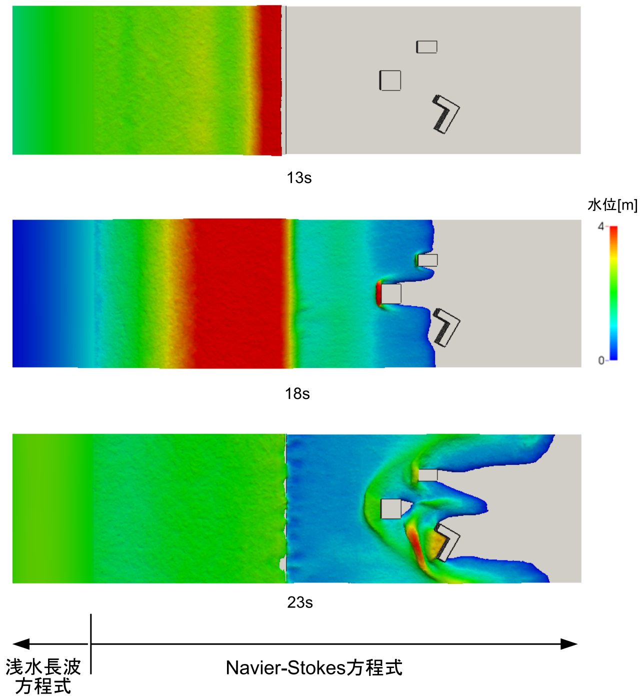
図–13 解析モデル



図–14 構造物付近のメッシュ図



図–15 津波遡上解析結果（潜堤あり）



図–16 津波遡上解析結果（潜堤なし）

- MPC 条件を用いることにより，2D-3D 領域の接合境界の節点が不連続であっても安定かつ高精度に解析が可能であることを示した．
- 津波遡上解析において，非構造格子を用いることで複雑な形状を有する解析領域に対しても，沖合から遡上域まで連成した解析が安定に解析が可能であることを示した．

今後は，実地形を考慮した津波の遡上解析を行い，本手法の有効性についてさらに検討を重ねる予定である．

謝辞: 本研究は科学研究費助成金・基盤研究 (A)(課題番号 : 25246043) 「遡上津波と構造物の相互作用評価のためのマルチスケール数値実験」からの助成を受けたものです．ここに記して，感謝を表します．

参考文献

1) Heniche, M., Secretan, Y., Boudreau, P. and Leclerc, M. : A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries, *Advances in Water Resources*, 23, pp.360-371, 2000.
2) 赤穂良輔，伊井仁志，肖鋒 : CIP/Multi-Moment 有限体積法を用いた非構造格子津波シミュレーターの開発，第 21 回数値流体力学シンポジウム，日本流体力学会, 2007.
3) 高橋佑典，桜庭雅明，樫山和男 : CIVA －安定化有限要素法による津波の並列シミュレーション，第 27 回数値流体力学シンポジウム，日本流体力学会，2013.
4) 岩瀬浩之，見上敏文，後藤智明 : 非線形分散波理論を用

いた実用的な津波計算モデル，土木学会論文集，土木学会，No.600/II-44，pp.119-124, 1998.
5) 小谷佐美，今村文彦，首藤伸不夫：GIS を利用した津波遡上計算と被害推定法，海岸工学論文集, 土木学会，第 45 巻, pp.356-360, 1998.
6) 今井健太郎，松冨英夫：樹冠部の変形を考慮した樹木の抵抗則とそれを用いた沿岸林域の氾濫計算，土木学会論文集 B, 土木学会, 64，No.3，pp.214-225, 2008.
7) 米山望，松山昌史，田中寛好：1993 年北海道南西沖地震津波における局所遡上の数値解析，土木学会論文集，土木学会，No.705，pp.139-150, 2002.
8) 桜庭雅明，弘崎聡，樫山和男：CIVA/Levelset 法による越波・遡上の数値解析，海岸工学論文集，土木学会， 第 51 巻, pp.36-40, 2004.
9) 正村憲史，藤間功司，後藤智明，重村利幸：2D/3D ハイブリッドモデルによる構造物に作用する流体力の検討，水工学論文集，第 45 巻，pp.1243-1248，2001.
10) 正村憲史，藤間功司，後藤智明，重村利幸：2 次元・3 次元ハイブリッドモデルを用いた津波の数値解析，土木学会論文集，土木学会，No.670/II-54，pp.49-61，2001.
11) 富田孝史，柿沼太郎：海水流動の 3 次元性を考慮した高潮・津波数値シミュレータ STOC の開発と津波解析への適用，港湾空港義実研究所報告, 第 44 巻, 第 2 号, 2005.
12) 後藤和哉，志賀淳二，林雅江，沖田奏良，奥田洋司：アセンブル構造解析のための多点拘束前処理付反復解法，日本機械学会論文集 (A 編), 78 巻, 789 号，pp.708-717, 2012.
13) Brooks, A.N., Hughes, T.J.R.: streamline-upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, pp.199-259, 1982.
14) Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations : *Advanced in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1991.
15) Aliabadi,S., and Tezduyar, T.E.: Stabilized-finite-element/interface-caputuring technique for parallel computation of unsteady flows with interfaces, *Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp.243-261, 2000.
16) S.W. Bova and G.F. Carey : A symmetric formulation and SUPG scheme for the shallow-water equations, *Advances in Water Resouces*, 19, No.3, pp.123-131, 1996.
17) 松本純一，梅津剛，川原睦人：浅水長波方程式に対する安定化有限要素法と安定化気泡関数法，応用力学論文集，土木学会，Vol.5, pp.235-242, 2002.
18) J. Matsumoto, T. Umetsu and M. Kawahara : Stabilized bubble function method for shallow water long wave equation, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17, No.4, pp.319-325, 2003.
19) Hichols, B.D., Hir, C.W., Hotchkiss, R.S. : SOLA-VOF: A solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries, *Los Alamos Scientific Lab. Report*, LA-8355, 1985.
20) Hughes, T.J.R., Liu, W.K. and Zimmermann, T.K. : Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29, pp.329-349, 1981.
21) Huerta, A., Liu, W.K. : Viscous flow with large free surface motion, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69, pp.277-324, 1988.
22) 滝川清，山田文彦，松本健作：潜堤上砕波変形の内部特性とその数値解析，海岸工学論文集，土木学会，第 42 巻, pp.66-70, 1995.
23) 桜庭雅明，樫山和男：Levelset 法を用いた安定化有限要素法による自由表面流れの数値解析，海岸工学論文集，土木学会， 第 50 巻，pp.16-20, 2003.

(2014. 6. 20 受付)

TSUNAMI SIMULATION USING 2D-3D HYBRID METHOD BASED ON STABILIZED FINITE ELEMENT METHOD

Shinsuke TAKASE, Junji KATO, Shuuji MORIGUCHI, Kenjiro TERADA, Takashi KYOYA, Kazuya NOJIMA, Masaaki SAKURABA and Kazuo KASHIYAMA

This paper presents a 2D-3D hybrid stabilized finite element method that enables us to analyze both tsunami offshore propagation and runup in urban areas with high accuracy and relatively low computational costs. The shallow water equations are employed for 2D simulation of the offshore flow in a global oceanic area, while the incompressible Navier-Stokes equations are used to analyze 3D flow behavior in a local urban area. The SUPG method is commonly applied to stabilize both the 2D and 3D FE discretized equations, and the VOF method is used to capture the 3D free-surface flow. Meshes for 2D and 3D simulations are generated independently of each other and the method of multiple-point constraint is applied to impose the continuity conditions of flow velocities and pressures at the interface between the 2D and 3D meshes of different topologies. Several numerical examples are presented to demonstrate the performance and efficiency of the proposed hybrid method.