

複合厚板における断面構造のトポロジー最適化

西紳之介¹・寺田賢二郎²・加藤準治³

¹東北大学 大学院 工学研究科 (〒 980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1,
E-mail: nishi@mm.tohokou.ac.jp)

²Ph.D. 東北大学 災害科学国際研究所 教授 (〒 980-0845 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)

³Dr.-Ing. 東北大学 工学研究科 准教授 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

本研究では、面内周期性を有する複合板を対象として、そのマクロの力学的性能を最大化させるようなマイクロ構造(面内ユニットセル)の最適材料配置を決定する手法を提案する。最適化問題の設定にあたり、マクロ構造には厚板要素を用い、マイクロ構造には3次元の広がりを持つソリッド要素を想定し、両スケールの境界値問題を解くことでマイクロ構造の非均質性を反映した均質化板剛性を算出する。この均質化板剛性を用いて、マクロ厚板構造の剛性を最大にするトポロジー最適化問題を設定する。また、設定した目的関数に対する感度を解析的に得る手法を提示し、数値微分との比較により手法の信頼性を示す。そして、得られたユニットセルのトポロジーを提示することで、本手法の有用性を評価する。

Key Words: *topology optimization, composite plates, Reissner-Mindlin plate theory, homogenization, multiscale analysis*

1. はじめに

繊維強化プラスチック (Fibler Reinforced Plastics: FRP) に代表される複合材料は、軽量かつ高強度であり、また材料の組み合わせやその配置次第で、さまざまな性能を引き出すことができるため、航空宇宙をはじめ自動車産業など、多くの分野で用いられている。例えば、航空機の機体などは、エネルギー消費量の削減などを目的として材料の軽量化が求められており、最先端の研究が進められている。これらの複合材料は、材料微視組織(マイクロ構造)における材料配置や形状が材料全体の性能に大きな影響を及ぼすことが知られており、使用目的に見合ったマイクロ構造の研究開発が盛んに行われている。

このような材料開発においては、これまで経験則に基づいて形状を決め、実験を繰り返すことで寸法などを決定してきた。しかし近年、CAE技術の発展とともに有限要素法を用いたマルチスケール解析手法など、計算力学に基づく研究開発が行われるようになってきた。最近ではそれらの手法に加え、設計自由度の高いトポロジー最適化を融合して、マクロ的な力学の性能を最大にするようなマイクロ構造の最適化が行われている。例えば、Rodriguesら¹⁾は、剛性最大化を目的としてマクロ構造とマイクロ構造両方に対して、両者を同時に最適化できる手法を提案している。しかし、この手法はマクロ構造に複数の異なるマイクロ構造を許容しており、製造面を考慮すると非現実的な問題設定であるといえよう。一方、Huangら²⁾はマイクロ構造に周期性を仮定し

て、1種類のマイクロ構造が存在するという条件のもと、マクロ構造の剛性を最大にするようなマイクロ構造の最適化解析を行っている。同様に、Niuら³⁾は低次周期固有振動数の最大化を目的として単一のマイクロ構造を仮定し、マイクロ構造、マクロ構造を同時に最適化する手法を提案している。しかし、これらの手法はマイクロおよびマクロの境界値問題をマクロ構造要素の物質点ごとに連成して解くものであり、計算コストが大きくなるという難点がある。そのため、線形弾性問題であれば解析可能であるが、非線形構造問題への適用を考えると、計算コストが膨大となり、実用性に乏しい。これに対し、Katoら⁴⁾は分離型マルチスケール解析手法⁷⁾を用いたマイクロ構造のトポロジー最適化手法を提案している。この手法は、マイクロ-マクロ二変数境界値問題を分離して解く手法であり、数値材料試験^{5),6),7)}と称する近似的アプローチにより均質化材料を求める手法である。前述の連成型の手法と異なり計算コストを削減できるのに加え、様々な非線形材料モデルにも適用できるという利点がある。

以上で挙げたマルチスケール最適化解析はソリッド要素による解析がほとんどであり、本研究が対象としている板・シェル要素などへの適用性については未だ検討されていない。一方、本研究で対象としている複合板は図-1に示すように面内にも周期性を有するものであり、前述のマルチスケール解析が理論的拠り所としている通常の均質化法の適用対象外である。このような板状構造物に対しては、マイクロには3次元固体力学、マクロには2次元厚板理論を適用したマルチスケール

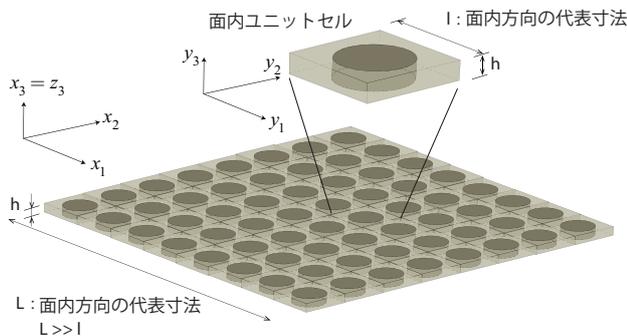


図-1 周期構造を持つ複合板の例

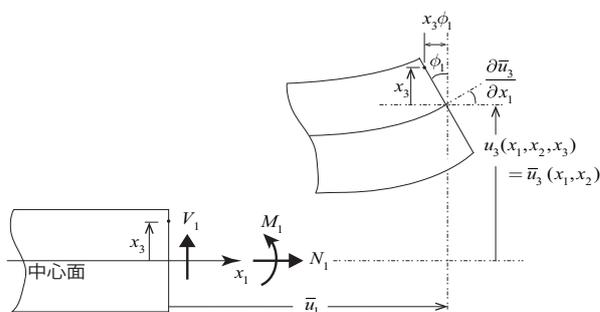


図-2 厚板理論変位場

解析手法の定式化が必要とされる。その種の複合板のマルチスケール解析については既にいくつか報告例があり、例えば、Geers ら⁸⁾は薄板理論に基づき均質化理論を確立しており、Buannic ら⁹⁾は、サンドウィッチパネルを対象に面外せん断変形を考慮した、マルチスケール解析手法を提案している。また、El-Sabbagh ら¹⁰⁾は、周期構造を有する厚板マクロ構造に対して、固有振動数を最大にするようなマイクロ構造のトポロジー最適化を行っている。これらの研究は、薄板理論を起点としているものがほとんどであり、中には面外せん断変形を考慮している例もあるが薄板理論による式展開の後で付随的に導入しているものであり、実用的な解析手法に至っていない。この理由としては、マイクロ構造に3次元的な広がりや許容しながら、マクロ構造に厚板理論を用いるようなマルチスケール解析手法は、周期構造であるマイクロ構造の厚板を含む代表寸法を無限小にする過程で、薄板理論の式しか導出できないという問題が内在しているからである。そのため、最適化解析においても、板厚断面を含めて3次元的にマイクロ構造のトポロジーを設計したような報告例は見受けられない。そのような背景のもと、Terada ら^{11),12)}は、数学的均質化法のように板厚や面内周期性の代表寸法をゼロにするような操作を行わず、ユニットセルを数値供試体とみだてて数値試験的に行うことによる均質化剛性を算出する、新しいマルチスケール解析手法を確立した。この手法により、板厚方向の材料の違いにより生じる、面外せん断変形を含めた複雑な変形も再現可能となる。また本手法は、分離型マルチスケール解析手法⁷⁾の一つであるため、前述の利点を保持している。

そこで、本研究では複合板の分離型マルチスケール解析手法^{11),12)}を用いた断面構造のトポロジー最適化手法の開発を目的とする。ただし、本手法は、複合体の最適化解析についての基礎的な段階であるため、線形弾性材料のみを対象とし、マクロ構造の力学的挙動を考慮しつつも設計対象は単一のマイクロ構造である。本論文では、本研究の概要について解説したあと、第2

節でマクロ厚板構造で定義される一般化ひずみと合応力、および三次元固体を模擬した面内ユニットセル領域に分布するマイクロひずみとマイクロ応力との関係を示し、マイクロ構造に依存する均質化板剛性を定義する。第3節と第4節では、その均質化板剛性を用いてマルチスケール最適化問題と感度の定式化を行い、マイクロ構造の最適トポロジー決定法を提示する。最後に最適化解析例として、各ユニットセルについてのマクロ剛性を最大化させるような形状を決める剛性最大化問題の解析を行い、最適化解析例を示すことで本手法の妥当性・有用性を検証する。

2. 複合板のマルチスケール解析

まず、マクロ構造に対して厚板理論を採用すると、マクロ座標系 x 上に働くマクロ構造の変位場 \mathbf{u} は図-2を参照して以下のようになる。

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_1(x_1, x_2) - x_3\phi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_2(x_1, x_2) - x_3\phi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2) = \bar{u}_3(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}$ は中心面上の水平変位であり、 ϕ は断面の回転角を表している。また、図中の N , M , V はそれぞれ板の断面に働く垂直合応力、曲げモーメント応力、面外せん断合応力である。以上を用いると、マクロひずみ \mathbf{E} は以下のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - x_3 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} - \phi_2 \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} - \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{E}^1 + x_3 \tilde{E}^4 \\ \tilde{E}^2 + x_3 \tilde{E}^5 \\ 0 \\ \tilde{E}^3 + x_3 \tilde{E}^6 \\ \tilde{E}^7 \\ \tilde{E}^8 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

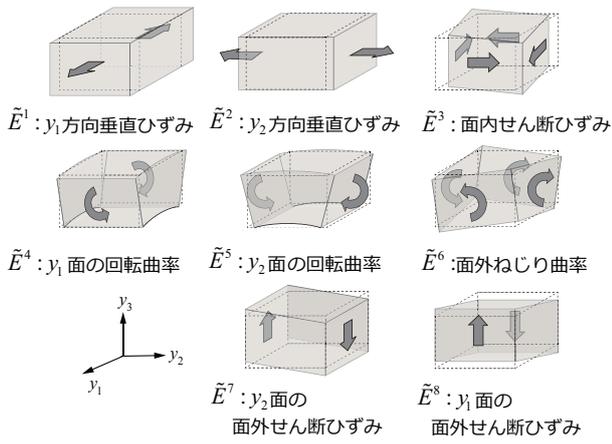


図-3 マクロ一般化ひずみ変形図

ここで、式中の $\tilde{\mathbf{E}}$ はマクロ一般化ひずみであり、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \left\{ \tilde{\mathbf{E}}^1 \quad \tilde{\mathbf{E}}^2 \quad \tilde{\mathbf{E}}^3 \quad \tilde{\mathbf{E}}^4 \quad \tilde{\mathbf{E}}^5 \quad \tilde{\mathbf{E}}^6 \quad \tilde{\mathbf{E}}^7 \quad \tilde{\mathbf{E}}^8 \right\}^T \\ &= \left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} & -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & & & & \\ & -\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & -\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} - \phi_2 & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} - \phi_1 & & & \end{array} \right\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

このとき、各マクロ一般化ひずみの変形図を図-3に示す。また、マイクロひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ を、以下のように定義する。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}^* \quad (4)$$

ここで、 y_i はマイクロ座標系であり、均質化の過程で用いるものである。また、 z_i は板曲げ理論で用いる運動学的なパラメータである。上式の $\boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}^*(\mathbf{y})$ は非均質に起因するマイクロ擾乱ひずみであり、一般化ひずみとマイクロひずみを結びつけるマトリックスである。それぞれ以下のように定義する。

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_2/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial y_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{u}^* はマイクロ構造内に周期的に分布するマイクロ擾乱変位である。その (7, 6) 成分、(8, 6) 成分に、ねじりの曲率を含む $-z_1/2, -z_2/2$ が付加されているが、これらはユニットセルのマクロねじり変形を再現するために導入された成分である^{11),12)}。以上をまとめると、マイクロ構造領域の支配方程式は以下ようになる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\partial}_y^T \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}^* = \boldsymbol{\partial}_y \mathbf{w} \\ \mathbf{u}^* : \text{In-plane Y-periodic} \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$ はマイクロ応力、 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})$ はマイクロひずみ、 \mathbf{w} はマイクロ変位、 \mathbf{C} は構成材料の弾性係数である。また、 $\boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}^*(\mathbf{y})$ は非均質性に起因するマイクロ擾乱ひずみである。この支配方程式は、一般化ひずみ $\tilde{\mathbf{E}}$ をデータとして、未知の擾乱変位 \mathbf{u}^* について面内周期性の拘束条件下で解くべきものである。

一方、マクロ一般化応力はマイクロ構造の全体積を Y 、面内方向の断面積を A とし、次式で定義する。

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{A} \int_Y \mathbf{z}^T \boldsymbol{\Sigma} dy \quad (8)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Sigma}$ はマクロ応力であり、以下のように定義する。

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{A} \int_Y \tilde{\mathbf{z}}^T \boldsymbol{\sigma} dz \quad (9)$$

また、ここで定義した \mathbf{z} は上記で定義した $\tilde{\mathbf{z}}$ と異なり、面内平均をとる仮定で $-z_1/2, -z_2/2$ の項が 0 となっており、以下のようになる^{11),12)}。

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

最終的には、以下のように均質化板剛性を $\tilde{\mathbf{D}}$ として、マクロ一般化応力 $\tilde{\mathbf{M}}$ とマクロ一般化ひずみ $\tilde{\mathbf{E}}$ の関係式を導出することができる。

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{E}} \quad (11)$$

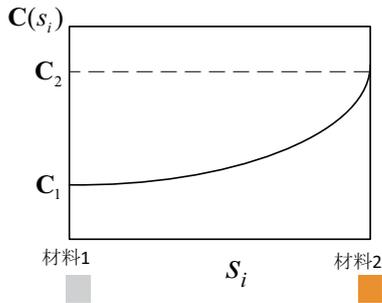


図-4 SIMP法を用いた弾性係数

本研究では、マイクロ構造の境界値問題を独立して解く数値平板試験を用いて、均質化板剛性を算出する。詳細については付録を参照されたい。

3. 最適化問題設定

(1) 設計変数および有効弾性係数の設定

本研究では、設計領域となる面内ユニットセルは二種の材料からなる複合構造とし、その有限要素モデルの各要素におけるどちらか一つの材料の体積分率を設計変数とする。この設計変数を $0 \leq s_i \leq 1$ の範囲で変化させることで、面内ユニットセルの材料配置を決定することができる。また、各要素の有効弾性係数 C は、SIMP法を用いて、

$$C(s_i) = C_1 s_i^\mu + C_2 (1 - s_i^\mu) \quad (12)$$

のように連続的に再現する(図-4)。ここで、 s_i はマイクロ構造要素内の任意の設計変数である。また、 C_1 、 C_2 はマイクロ構造内の構成材料の弾性係数であり、一定値として与えている。このとき、 μ は物理的な意味を持たないペナルティパラメータである。

(2) ミクロ構造の剛性最大化問題 1

ここでは、マクロ構造は考慮せず、面内ユニットセルに対して、所与のマクロひずみが生じたときのマクロ材料剛性を最大化させるマイクロ構造トポロジー最適化問題について述べる。ここで、 s_i は設計変数を意味し、ユニットセル内の i 番目の要素における材料 1 の体積分率である。最小化問題を以下のように設定した。

$$\min f(s_i) = -\tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{M}} \quad (13)$$

$$\text{subject to } h(s_i) = \int_Y s_i dY - V_0 = 0 \quad (14)$$

ここで、 s_i はマイクロ構造の要素 i の体積分率、 V_0 は初期解析時の材料 1 のマイクロ構造全体の体積量であり、制約条件式である式(14)は体積量一定条件を表している。

ところで、式(13)の $\tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{M}}$ は、式(4)を用いると、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{M}} &= \frac{1}{A} \tilde{\mathbf{E}}^T \int_Y \mathbf{z}^T \boldsymbol{\sigma} dY \\ &= \frac{1}{A} \int_Y (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}^*)^T \boldsymbol{\sigma} dY \\ &= \frac{1}{A} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dY \end{aligned} \quad (15)$$

と表すことができる。ここで、2行目から3行目の式展開で $\int_Y (\boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}^*)^T \boldsymbol{\sigma} dY = 0$ という関係を用いたが、これは $\boldsymbol{\partial}_y \mathbf{u}^*$ の周期性とマイクロ構造内での釣り合い式である $\boldsymbol{\partial}_y \boldsymbol{\sigma} = 0$ により導いた。最終的に本解析の設定問題は以下のようになり、マクロひずみが与えられたときのマイクロ構造の剛性最大化問題とみなすことができる。

$$\min f(s_i) = - \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dY \quad (16)$$

$$\text{subject to } h(s_i) = \int_Y s_i dY - V_0 = 0 \quad (17)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$ はそれぞれユニットセルにあるマクロひずみを与えたときに生じるマイクロひずみ、マイクロ応力である。例えば、 α 成分だけ値を持ち、その他は零であるようなマクロひずみを与えた場合、均質化板剛性の対角項成分である (α, α) 成分を最大化させる問題と等価となる。この目的関数、制約条件式に関して設計変数 s_i に対する感度を算出し、最適性規準法¹⁶⁾によって最適解を算出する。

(3) マクロ構造の剛性最大化問題

厚板要素で表されるマクロ構造を設定し、荷重を与えたときの、マクロ構造の剛性最大化問題以下のように設定した。

$$\min f(s_i) = \int_V \tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{M}} dV \quad (18)$$

$$\text{subject to } h(s_i) = \int_Y s_i dY - V_0 = 0 \quad (19)$$

ここで、 V はマクロ構造領域を指しており、マクロ構造全体の剛性を最大化することを示唆している。この目的関数の感度については、次節で説明する。制約条件式は式(17)と同じでマイクロ構造の体積量一定条件を与えている。

4. 感度の導出

(1) 目的関数の感度の導出

ここでは、目的関数(18)の設計変数 s_i に対する感度について、随伴法⁴⁾を用いてを算出する。まず、式(11)を制約条件とする、等価な目的関数 $\bar{f}(s_i)$ に置き換える。

$$\bar{f}(s_i) = \int_V \left\{ \tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{E}}^{*T} (\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{M}}) \right\} dV \quad (20)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{E}}^*$ は、随伴ベクトルであり、任意の値を持つ。次に、目的関数 $f(s_i)$ について感度を求めて整理すると、

以下のようになる。

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial s_i} = \int_V \left\{ (\bar{M}^T - \bar{E}^* \bar{D}) \frac{\partial \bar{E}}{\partial s_i} - \bar{E}^* \frac{\partial \bar{D}}{\partial s_i} \bar{E} \right\} dV \quad (21)$$

このとき、随伴ベクトルは設計変数 s_i に依存しないことを考慮している。最後に、随伴ベクトルを $\bar{E}^* = \bar{E}$ のように置くと、式 (21) の右辺の第一項が消え、以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial s_i} = - \int_V \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial s_i} \bar{E} dV \quad (22)$$

したがって、 $\partial \bar{D} / \partial s_i$ を導出できれば、陽的に感度を求めることができる。この項については次項で詳しく述べる。

(2) 板剛性の感度の導出

本節では、谷地ら¹³⁾の方法に倣い、板剛性行列の感度の導出方法について解説する。まず、式 (15) より、 \bar{D} の (α, β) 成分は、 α 成分あるいは β 成分にのみだけ 1 であり、他の成分が 0 であるようなマクロひずみ $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\alpha)}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\beta)}$ を用いて、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\alpha, \beta}(s_i) &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\alpha)T} \bar{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\beta)} \\ &= \frac{1}{A} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)T} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} dY \end{aligned} \quad (23)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)}$ はそれぞれ、ユニットセルに対し、上記マクロひずみ $\mathbf{E}^{(\alpha)}$ 、 $\mathbf{E}^{(\beta)}$ を与えて生じるマイクロひずみである。上の関係式より、 $\partial D(s_i) / \partial s_i$ の (α, β) 成分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\alpha, \beta}(s_i)}{\partial s_i} &= \frac{1}{A} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)T} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s_i} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} dY \\ &\quad + \frac{1}{A} \int_Y \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)T}}{\partial s_i} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} dY \\ &\quad + \frac{1}{A} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)T} \mathbf{C} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)}}{\partial s_i} dY \end{aligned} \quad (24)$$

上式の第 2, 3 項の $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial s_i$ は、式 (4) の $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ が設計変数に非依存であるという関係から $\partial(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^*) / \partial s_i$ と等価であり、これはユニットセル内の周期境界条件を満たす。そのため、式 (15) の式展開と同じ理由により、上式の第 2, 3 項は消去することができる。

最終的に、有効弾性係数に関する式 (12) を用いて、以下のようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\alpha, \beta}(s_i)}{\partial s_i} &= \frac{1}{A} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)T} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s_i} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} dY \\ &= \frac{1}{A} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)T} (\mu s_i^{\mu-1}) (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \boldsymbol{\varepsilon}^{(\beta)} dY \end{aligned} \quad (25)$$

本式を用いることで、感度の式 (22) は陽的に求めることが可能となる。

(3) 板剛性感度の精度検証

上で導出された均質化板剛性の解析的感度を、計算コストは大きい信頼性の高い数値微分により得た結果と比較する。数値微分には有限差分法を用いており、感度は以下のように前進差分近似により算出した。

$$\frac{\Delta \bar{D}}{\Delta s_i} = \frac{\bar{D}(s_i + \Delta s_i) - \bar{D}(s_i)}{\Delta s_i} \quad (26)$$

ここで、 Δs_i は設計変数の有限微小増分量であり、 $\Delta s_i = 1.0 \times 10^{-7}$ を与えている。マイクロ構造の材料定数ならびに、マクロ構造の境界条件は後述の最適化計算例で用いたものと同じものを用いており、それぞれ表-2、図-11 に示している。マイクロ構造に用いた有限要素は 8 節点六面体要素で、要素数は $4 \times 4 \times 2 = 32$ 要素である。また、ペナルティパラメータは $\mu = 3$ として解析した。比較した結果を表-1 に示す。ここで、表-1 に記載した Error

表-1 感度比較

(α, β)	$\Delta D / \Delta s_i$	$\partial D / \partial s_i$	Error(%)
(1,1)	133.9799724	133.9799484	1.8E-05
(1,2)	40.19398034	40.19398453	1.0E-07
(2,2)	133.9799621	133.9799484	1.0E-05
(3,3)	46.89297953	46.89298195	5.2E-06
(1,4)	16.74749555	16.74749355	1.2E-05
(1,5)	5.024296417	5.024248066	9.6E-04
(2,4)	5.024296443	5.024248066	9.6E-04
(2,5)	16.74749521	16.74749355	9.9E-06
(3,6)	5.861626236	5.861622744	6.0E-05
(4,4)	3.192490254	3.192490959	2.2E-05
(4,5)	0.9943824075	0.9943824298	2.2E-06
(5,5)	3.192489970	3.192490959	3.1E-05
(6,6)	0.9769372156	0.9769371240	9.4E-06
(7,7)	41.44031607	41.44031667	1.4E-06
(8,8)	41.44031664	41.44031667	7.2E-08

は以下のように算出した。

$$\text{Error}(\%) = \frac{|\partial \bar{D} / \partial s_i - \Delta \bar{D} / \Delta s_i|}{\Delta \bar{D} / \Delta s_i} \times 100 \quad (27)$$

誤差は 10^{-4} 以下に抑えられるなど、極めて良好な結果が得られており、提案する感度導出法の妥当性が確認できた。

5. 数値解析例

(1) ミクロ構造の剛性最大化問題

数値解析例として、まず前項 (2) で示したマイクロ構造にマクロ一般化ひずみを与えたときの、剛性最大化問題の結果を示す。本解析で用いたマイクロ構造(面内コ

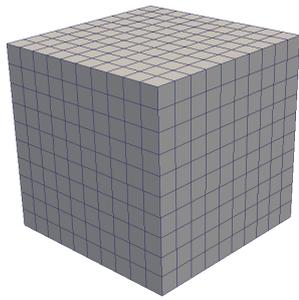


図-5 ミクロ構造 (面内ユニットセル)

表-2 ミクロ構造の材料パラメータ

	Young's modulus (N/mm ²)	Poisson's ratio	Volume fraction (%)
phase-1	0.1	0.3	50
phase-2	10000	0.3	50

ユニットセル)を図-5に示す。ここでは、8節点六面体要素を用い、要素数は $14 \times 14 \times 14 = 2744$ 要素である。また、ペナルティパラメータは $\mu = 3$ として解析した。その他、材料値などの設定条件は前述の表-2と同じである。また、本解析では最適化後のトポロジーにチェッカーボード現象を出さないようにするため、感度を以下に示すように近傍要素との感度との平均化をすることで、フィルタリング^{14),15)}を行っている。

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s_i}\right) = \frac{\sum_j w_{ij} s_j \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s_j} / v_j}{\frac{1}{v_i} \sum_j w_{ij} s_j} \quad (28)$$

式中の i と j は要素番号をさしており、 v_i は要素 i の体積量である。また、 w_{ij} は $w_{ij} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r_{ij}}{R/2}\right)^2\right]$ と定義する。 r_{ij} は要素 i, j の中心点との距離であり、 R はフィルターをかける範囲である。本研究では、最適化解析の収束性を高めるため、最適化解析ステップが経過するにつれて、フィルターをかける範囲を狭めるように設定している。

6. 数値解析例

まず、ユニットセルに対し、マクロ曲げ変形、マクロねじり変形、マクロ面外せん断変形を与えたときの最適形状をそれぞれ図-6に示す。ここで、図中のオレンジ色の部分が硬い材料である材料2であり、白色の部分が柔らかい材料である材料1である。マクロ曲げ変形、マクロねじり変形に対しては、ユニットセルの上下面に硬い材料が配置される結果となった。一方、面外せん断変形に対しては、変形の方に沿うように縦に硬い材料が配置される結果となった。

次に、ユニットセルの上面、下面に硬い材料(オレンジ

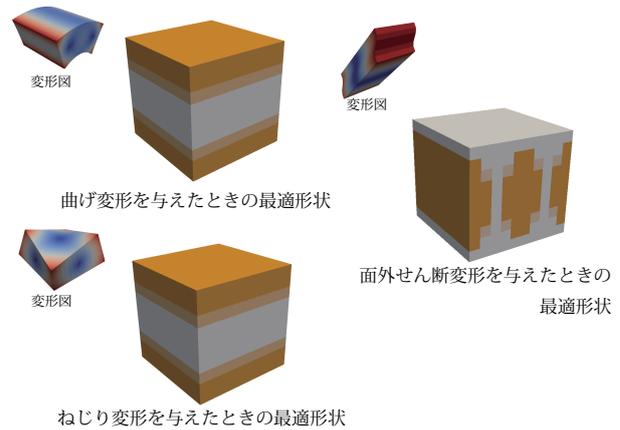


図-6 各変形モードに対する最適形状

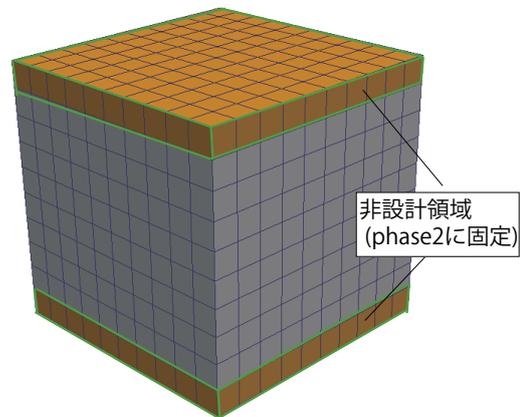


図-7 ミクロ構造-初期条件

色の部分)を配置して非設計領域とし、曲げに強い材料にした状態で、面外せん断変形を与えることを考える(図-7)。この最適化解析は、サンドウィッチパネルの内部構造(グレー部分)の設計を意図している。まず、1方向の面外せん断変形に対応するマクロ一般化ひずみ \vec{E}_8 (図-3)を与えたときの最適形状を図-8に示す。ここで、図-6では材料1を白色で表現したが、今回は内部構造をわかりやすく表示するため透明として表している。1方向の面外せん断変形を与えた場合では、上下面に直交する方向に部材が配置され、I型のようにになっていることが確認できる。また、図-9に示すように、目的関数の値も大きく減少しており、実際、面外せん断変形を与えた方向の面外せん断剛性 $\bar{D}_{8,8}$ は、 $8.67 \times 10^2 \text{N/m}$ から $3.22 \times 10^3 \text{N/m}$ と増加している。一方、その直交方向の面外せん断剛性 $\bar{D}_{8,8}$ は $8.67 \times 10^2 \text{N/m}$ から $3.13 \times 10^2 \text{N/m}$ と低くなる結果となった。

次に、2方向の面外せん断変形に対応するマクロ一般化ひずみ \vec{E}_7, \vec{E}_8 を同時に与えた際の最適形状を図-10

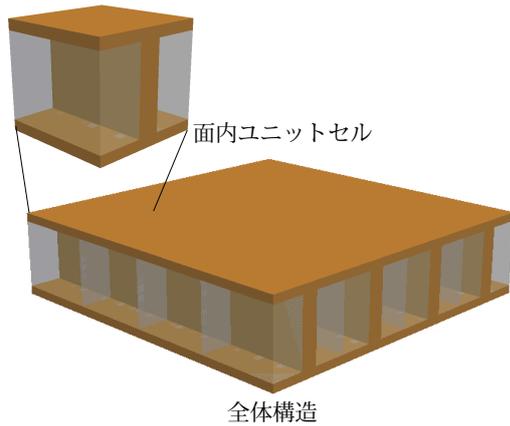


図-8 面外せん断変形 \bar{E}_7 に対する最適化結果

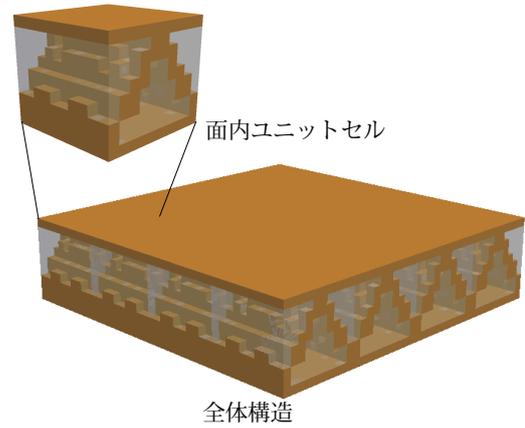


図-10 面外せん断変形 \bar{E}_7, \bar{E}_8 に対する最適化結果

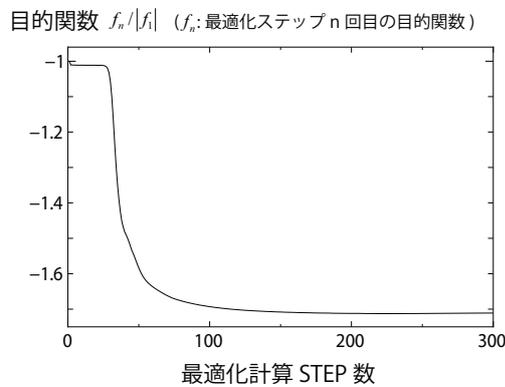


図-9 目的関数の推移

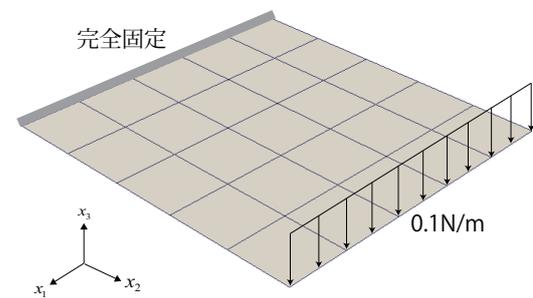


図-11 Case1 マクロ構造-境界条件

に示す。2方向に同時に面外せん断変形を与えた場合には、上下面をつなぐようにV字ができており、両方向に対して力を受け持つように硬い材料が配置されていることがわかる。このとき、両面外せん断剛性 $\bar{D}_{7,7}$, $\bar{D}_{8,8}$ はどちらも $8.67 \times 10^2 \text{ N/m}$ から $2.35 \times 10^3 \text{ N/m}$ となり、どちらも63%程度改善される結果となった。他にも様々な変形モードを与えたがいずれも力学的に合理的なトポロジーが得られていることを確認している。

(1) マクロ構造の剛性最大化問題

続いて、前節(3)で示したマクロ構造の剛性を最大化するマイクロ構造の設計を行う。まず、マクロ構造の境界条件を図-11に示す。寸法が $100\text{m} \times 100\text{m}$ のマクロ構造要素に8節点のセレンディピティ平板要素を用いており、 $5 \times 5 = 25$ 要素数である。一方の辺を完全固定し、もう一方の辺に分布荷重をかけ、片持ち梁のような条件を与えている。このときマイクロ構造ならびに材料パラメータなどの解析条件は、図-5、表-2に示したように、前節と同じものを用いている。このときの最適化

結果は図-6に示した曲げに対する最適形状と同様、ユニットセルの上部と下部に硬い材料が配置される結果となった。そこで、今度は体積比を変えて20%対80%とし(表3)、解析を行った。図-12はその最適化結果を示したもので、曲げ変形にだけでなく面外せん断方向に強い形状が得られていることがわかる。得られたユニットセルの均質化板剛性について、特に曲げ剛性を示す成分 $\bar{D}_{4,4}$ が、 $4.72 \times 10^2 \text{ N/m}$ から $8.92 \times 10^2 \text{ N/m}$ となるなど、大きな向上が見られた。実際、最適化解析によりマクロ構造の最大変位量が 1.93m から 1.02m と減少しており、約53%の剛性の改善が見られた。

表-3 ミクロ構造の材料パラメータ

	Young's modulus (N/mm ²)	Poisson's ratio	Volume fraction (%)
phase-1	0.1	0.3	20
phase-2	10000	0.3	80

次に、マクロ構造の境界条件を図-13のように設定して解析を行った。また、ユニットセルは表-3による材料パラメータを用いた。得られた最適トポロジーを

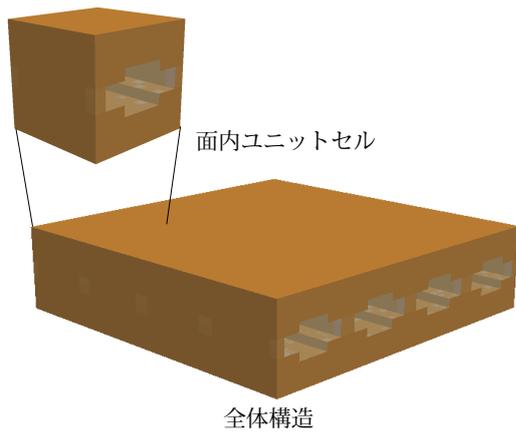


図-12 Case1 最適化結果

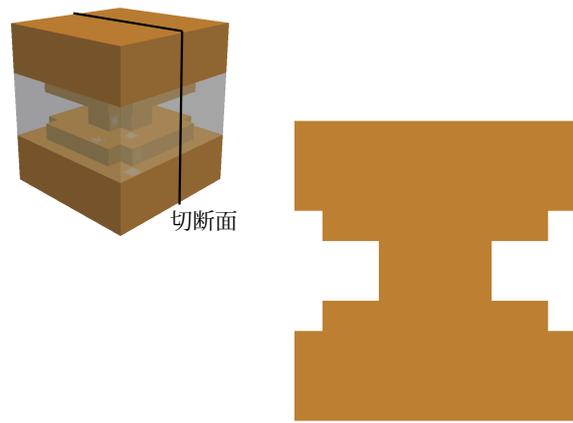


図-14 Case2 最適化結果-断面図

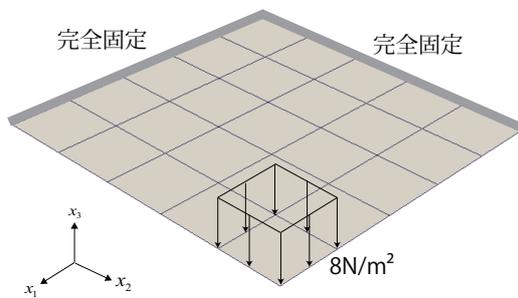


図-13 Case2 マクロ構造-境界条件

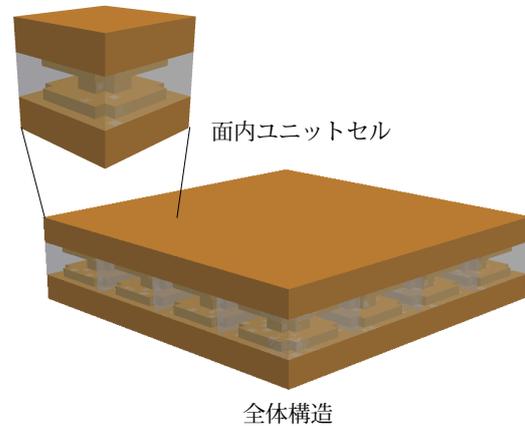


図-15 Case2 最適化結果

図-15 に示す。図-14 に示した最適形状の断面図のように、両面外せん断方向に強い材料配置が得られていることがわかる。得られたユニットセルの均質化板剛性について、今解析でも特に曲げ剛性を示す成分 $\tilde{D}_{4,4}$ が、 $4.72 \times 10^2 \text{N/m}$ から $8.92 \times 10^2 \text{N/m}$ となっており、大きな向上が見られた。マクロ構造の最大変位量が 9.08m から 4.82m と減少するなど、約 54% の改善が見られた。

7. おわりに

面内周期性を有する複合板を対象として、そのマクロ的な力学的性能を最大化させるようなマイクロ構造(ユニットセル)、すなわち断面構造のトポロジーの最適設計手法を提案した。具体的には、マクロ構造には厚板理論を適用し、マイクロ構造は3次元固体として定式化されたマルチスケール解析手法に対し、マイクロ構造のトポロジー最適化を導入し、板厚方向の断面形状を含むユニットセルの形状を解析できるアルゴリズムを構築した。さらに高精度な解析的感度法を提案し、これ

により低コストかつ信頼性に優れた最適化を導入可能とした。

最適化解析例として、ユニットセルに単位のマクロ一般化ひずみを与えたときのマイクロ構造の剛性最大化問題をまず解くことで、各変形モードに従った剛性の強い形状が得られることを確認した。その上で、2つのマクロ構造に対し、マクロ厚板構造の剛性を最大にするユニットセルの設計を行い、力学上合理的な結果を示すことができた。これらの最適化結果より、本手法の有用性を示すことができた。

ただ、本提案手法の実用化を進めるなかで、考慮すべき項目は少なくない。本研究では、マイクロ構造に周期性を仮定し、1種類のユニットセルが存在するという条件のもと解析を行ったが、マクロ構造内に曲げ変形が支配的領域と面外せん断変形が支配的領域が混在する場合があります。そのような場合にはマクロ構造の場所によって異なるトポロジーを配置した方が

参考文献

- 1) Rodrigues, H., Guedes, J.M. and Bendsoe, M.P., "Hierarchical optimization of material and structure", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.24, No. 1, 2002, pp.1-10.
- 2) Huang, X., Zhou, S.W., Xie, Y.M. and Li, Q., "Topology optimization of microstructures of cellular materials and composites for macrostructure", *Computational Materials Science*, Vol.67, 2013, pp.397-407.
- 3) Niu, B., Yan, J. and Chen, G., "Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.39, No. 2, 2009, pp.115-132.
- 4) Kato, J., Terada, K. and Kyoya, T., "Topology optimization of micro-structure for composites applying a decoupling multi-scale analysis", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.261-262, 2013, pp.167-176.
- 5) 寺田賢二郎, 犬飼壯典, 平山紀夫, "非線形マルチスケール材料解析における数値材料実験", 機械学会論文集 (A編), 第74巻, 第744号, 2008, pp.1084-1094.
- 6) Watanabe, I. and Terada, K., "A method of predicting macroscopic yield strength of polycrystalline metals subjected to plastic forming by micro-macro de-coupling scheme", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.52, No.2, 2010, pp.343-355.
- 7) Terada, K., Kato, J., Hirayama, N., Inugai, T. and Yamamoto, K., "A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials", *Computational Mechanics*, DOI10.1007/s00466-013-0872-56, 2013.
- 8) Geers, M. G. D., Coenen, E. W. C. and Kouznetsova, V. G., "Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets", *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, Vol.15, 2007, S393-S404.
- 9) Buannic, N., Cartraud, P. and Quesnel, T., "Homogenization of corrugated core sandwich panels", *Composite Structures*, Vol.59, 2003, pp. 299-312.
- 10) El-Sabbagh, A., Wael, A. and Baz, A., "Topology optimization of periodic Mindlin plates", *Finite Element in Analysis and Design*, Vol.44, 2008, pp.439-449.
- 11) 寺田賢二郎, 平山紀夫, 山本晃司, 松原成志朗, "複合板の線形マルチスケール解析", 計算工学会論文集, No.20150001, 2015.
- 12) Terada, K., Hirayama, N., Yamamoto, K., Muramatsu, M., Matsubarqa, S. and Nishi, S., "Numerical plate testing for linear two scale analyses of composite plates with in-plane periodicity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in print.
- 13) 谷地大舜, 加藤準治, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史, "マルチスケールトポロジー最適化手法と解析の感度導出手法の提案", 計算工学会論文集, No.20130022, 2013.
- 14) 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池昇, "トポロジー最適化", 日本計算工学会編, 丸善, 2013, pp.92-98.
- 15) Borrvall, T. "Topology optimization of elastic continua using restriction", *Archives of Computational Meth in Engineering.*, 8(4), 2001, pp.351-385.
- 16) Patnaik, S.N. et al. "Mertis and limitations of optimality criteria method for structural optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.38, 1995, pp.3087-3120.

(2015. 6. 23 受付)

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CROSS-SECTION STRUCTURE FOR THICK COMPOSITE PLATE

Shinnosuke NISHI, Kenjiro TERADA, Junji KATO

The present study proposes a method of topology optimization of microstructures (in-plane unit cell) that maximizes the overall mechanical performance of composite plates. The proposed method hinges on the method of numerical plate testing for two-scale composite plate model, in which thick plate theory is employed at macro-scale and 3D solids are assumed at the micro-scale. Since the macroscopic generalized strain and stress are respectively related to the microscopic strain and stress distributed in the unit cell, the homogenized plate stiffness appropriately reflects the geometrical feature of microstructures. Several optimized topologies that maximize the macroscopic stiffness are presented to demonstrate the capability of the proposed method.