

熱応力を考慮したトポロジー最適化の 基礎的検討

市川智¹・加藤準治²・京谷孝史³

¹ 学生会員 東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

² 正会員 東北大学准教授 大学院工学研究科 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

³ 正会員 東北大学教授 大学院工学研究科 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

本研究では、熱負荷および力学的外荷重が同時に作用する問題に対して、従来の研究で多く用いられているコンプライアンス最小化の問題点を指摘し、さらに同様の枠組みを保ちながら、より改善効果の高い新しいコンプライアンス最小化法を提案している。熱負荷による荷重は、構造の材料配置に依存して変化してしまう。そのため、剛性最大化は必ずしもコンプライアンスの最小化と等価にならない点を指摘している。また、複合材料を扱う最適化では材料パラメータの相関が無秩序となるため、一般に最適設計が困難となる。本研究ではこれを軽減するための方法について言及する。

Key Words: *topology optimization, thermal stress, thermo elastic, design-dependent loading*

1. はじめに

トポロジー最適化の中で、最も基本的な問題は、材料体積量に制約条件を課した上で一定の力学的外荷重を載荷し、構造の剛性を最大にする問題であろう。

また、剛性最大化問題の解法は、変位ベクトルと外力ベクトルの内積で計算されるコンプライアンス最小化問題と等価であると考え、有限要素法を用いて設計領域を離散化したあと、要素密度を設計変数として定義し、最適材料配置問題に置き換えて解くのが最も標準的で分かりやすい方法であろう。

しかし、近年、より現実的な構造問題を考慮したトポロジー最適化の研究が多く、中でも構造依存荷重を取り扱う問題が増えている。構造依存荷重とは、自重や水圧、熱応力などのように構造幾何、すなわち、構造のトポロジーや形状の変化に依存してその大きさが変化する荷重を指す。これらの荷重の中でもとりわけ熱に関して言えば、程度の差はあるもののすべての構造物は温度変化が生じる環境下で使用されていることから、熱の影響を適切に考慮したトポロジー最適化について詳しく理解しておくことは重要であると思われる。また、力学的外荷重は通常負荷されているはずなので、これら2つの荷重を同時に考慮したトポロジー最適化は現実的な荷重条件を指し示していると考えべきであり、言わば熱および力学問題のマルチフィジックス問題の代表格であると言えよう。

このような経緯から、本研究では熱と力学的外荷重

が同時に作用するトポロジー最適化を取り扱う。なお、熱応力と力学的外荷重が同時に作用するトポロジー最適化に関する研究は、90年代前半頃から本格的に議論されはじめ、現在でも様々な問題が取り扱われている。

まず、熱応力を考慮したトポロジー最適化の研究として古いものでは、Rodrigues と Fernandes¹⁾ によるものが挙げられる。その論文は、熱応力および力学的外荷重を作用させた上で、均質化法を用いてコンプライアンス最小化を図るものである。ここでの解析例はひとつのベンチマークとして、後続の研究でも度々使用されている。ただし、この論文では簡便的に温度分布は構造幾何に依存せず一定であると仮定している。Li ら²⁾ は、evolutionally method という方法を用いて熱弾性体の変位の最小化トポロジー最適化問題を取り扱っている。また、Li ら³⁾ は、熱伝導方程式を解いて得た非一様な温度場を考慮した構造のコンプライアンス最小化手法を提案している。一方、Jog⁴⁾ は、非線形熱弾性体のコンプライアンス最小化を目的関数にとり、そのトポロジー最適化を定式化している。また、コンプライアンス以外の目的関数を扱っている例では Joshua ら⁶⁾⁷⁾ がある。ここでは、応力制約条件下のもとで材料体積量の最小化を目的関数としている。

さて、上記の研究報告文の多くはいずれも力学的外荷重と熱応力による荷重を足し合わせた上で構造解析を実行して変位ベクトルを求め、標準的なコンプライアンス最小化問題と同じ枠組みで剛性最大化を図って

いる。しかし、熱応力による荷重はそもそも構造幾何に依存するため、構造のトポロジーを更新するたび変化してしまう。つまり、力学的外荷重と違って最適化計算の中で熱応力による荷重を一定に保つことはできない。これは、力学的外荷重単独の場合は剛性最大化はコンプライアンス最小化と等価であると考えてもよいが、熱応力による荷重を考慮した場合は、剛性最大化はもはやコンプライアンス最小化とは等価にはならないことを示唆している。ちなみに著者らの経験では、熱応力による荷重に対してコンプライアンス最小化を行った場合、熱膨張を大きく促進させる、ストレスフリーのような軟らかい構造が最適構造になりやすく、剛性最大化とは相反する構造となってしまうことが多い。

Wang ら⁵⁾は、この問題に対処するために“力学的外荷重に対するコンプライアンス最小化問題”と“熱応力によって生じる熱膨張量最小化問題”に分け、それぞれに重み付けをして足し合わせた多目的最適化問題を提案している。しかし、この方法で得られる最適化トポロジーは重みに強く依存するとともに、重みの決定方法も定まらないため非常に扱いにくい。

このような背景から、本研究では熱応力による荷重と力学的外荷重が同時に作用する問題に対して、従来の扱いやすいコンプライアンス最小化の枠組みを維持した中で剛性を最大にするような最適化問題を提案する。本研究が新たに目指すところはまさにその問題解決にある。

また、他にも熱問題を考慮したトポロジー最適化を議論するにあたり考慮することとして、現実の問題においてはコンポジット（複合材料や複合構造）を念頭に入れた研究開発の推進が望まれているということが挙げられる。これは、現存する多くの構造部材は多かれ少なかれコンポジット構造であるが熱伝導率や熱膨張係数が大きく異なる部材を繋いだ場合は、部材内部にひずみエネルギーが蓄積したり熱によって部材が反り変形を起こすなど、問題となるケースが多いためである。しかし、トポロジー最適化でコンポジット部材の最適設計を行うのは単一材料からなる部材に比べて難しい。その理由の1つ目は、得られた複合構造の最適化トポロジーは直感的に理解しづらい複雑なトポロジーになりやすいこと、2つ目は構成材料のパラメータの大きさが無秩序な場合が多いことである。ここでいう無秩序とは、例えば2つの構成材料aとbがあって、ヤング率が $E_a < E_b$ であるのに熱膨張率など他の材料パラメータが逆の関係にある場合などである。構成材料の種類やパラメータの数が増えるとさらに無秩序になり、最適解を見つけづらくなる。これより、本研究ではコンポジットの材料無秩序さを含んだ場合への対処方法について言及する。

これらを踏まえ、後述の最適化計算例においては、熱応力による荷重を考慮したコンプライアンス最小化に関する例題と、コンポジットの材料パラメータが無秩序に存在する場合の例題について紹介する。

2. 熱応力を考慮した有限要素法の定式化

(1) 熱応力による荷重ベクトル

本研究では、外部からの熱流入はないものとして、設計領域全体に一律な大きさの温度変化を与え、熱による等方的な膨張・収縮を熱荷重として考える。これより構造全体の熱荷重ベクトル F^{th} は次のように表せる。

$$F^{th} = \int_{\Omega} B^T D \epsilon^{th} d\Omega \quad (1)$$

ここで、 B は B マトリックス、 D は弾性マトリックスである。この D を設計変数に依存するヤング係数 $E(s_i)$ と、それ以外の部分に分けて以下のように表す。

$$D = E(s_i) \bar{D} \quad (2)$$

ここで、 \bar{D} は定数である。また ϵ^{th} は熱ひずみベクトルであり以下のように表せる。

$$\epsilon^{th} = \alpha(s_i)(T - T_{ref}) \phi^T = \alpha(s_i) \Delta T \phi^T \quad (3)$$

ここで、 $\alpha(s_i)$ は熱膨張係数である。 T_{ref} は積分点における初期の温度を表し、 T はその時点での積分点での温度を表す。 ΔT はその温度変化を意味する。なお、2次元問題においては、 $\phi = \{1 \ 1 \ 0\}^T$ である。式(2)と式(3)を、式(1)に代入することで以下のように表せる。

$$F^{th} = \beta(s_i) \Delta T \int_{\Omega} B^T \bar{D} \phi^T d\Omega \quad (4)$$

$$\text{where } \beta(s_i) = E(s_i) \alpha(s_i) \quad (5)$$

ここで、 $\beta(s_i)$ は熱応力係数と呼ばれる。

(2) 熱応力を考慮した有限要素法

まず、力のつり合い式である仮想仕事式は、コーシー応力テンソル σ^m 、仮想ひずみ $\delta \epsilon$ 、表面力テンソル \hat{t} 、仮想変位 δu を用いて以下のように与えられる。

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon : \sigma^m d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u \cdot \hat{t} d\Gamma = 0 \quad (6)$$

ここで、添字 m は力学的荷重に関連するものであることを意味する。なお、本研究では物体力を考慮しない。この仮想仕事式を有限要素法で解くために、対象とする領域全体を以下のように離散化する。

$$\Omega \approx \bigcup_{e=1}^M \Omega_e \quad (7)$$

ここで、 M は領域全体を分割する要素数、 Ω_e は境界 Γ_e を持つ要素 e の小領域を表す。さらに、 σ^m を弾性行列 D と外荷重により生じるひずみ ϵ^m を用いて表す。このとき、各要素 e について成り立つべき仮想仕事式は

次のようになる。

$$\int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^m d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma_e = 0 \quad (8)$$

全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は、式 (9) のように熱ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}$ と力学ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ の和で表せるので、式 (8) は式 (10) のように記述することができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} \quad (9)$$

$$\int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}) d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma_e = 0 \quad (10)$$

ここで、変位 \mathbf{u} と仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ を、要素 e の形状関数 \mathbf{N} と要素節点変位ベクトル \mathbf{u}_e を用いて表し、同様に全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ および仮想ひずみ $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ を、要素節点変位ベクトル \mathbf{u}_e と B マトリックスを用いることで、次のように内挿近似して表す。

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N} \mathbf{u}_e, \quad \delta \mathbf{u} \approx \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_e \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B} \mathbf{u}_e, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_e \quad (12)$$

よって、式 (10) は次のように表せる。

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} d\Omega_e \quad (13)$$

これより、次式で示される全体の有限要素方程式を得る。

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}^m + \mathbf{F}^{\text{th}} \quad (14)$$

ここで、 \mathbf{K} は構造全体の剛性行列、 \mathbf{F}^m は力学的外荷重ベクトル、 \mathbf{F}^{th} は熱応力による荷重ベクトルである。なお、 \mathbf{u} は節点変位ベクトルであり、この式を解いて得られる。

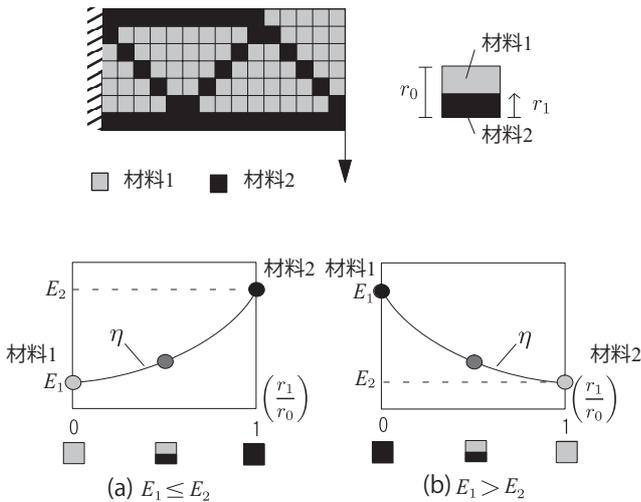


図-1 二相材料最適化の概念図

3. 設計変数の定義と内挿関数

(1) 設計変数の定義

通常の方法を用いた単一材料のトポロジー最適化においては、設計変数は要素ごとの材料密度として定義される。本研究においては2相の複合材料を想定するため、ここでは多相材料最適化手法を導入する。図-1では、2つの固体相からなる複合材料を対象とした2相材料最適化の概念を示している。ここでは、2次元の四辺形要素を想定しており、 r_0 はある要素の有限要素の厚さ、 r はその要素内の材料2の厚さである。よってこの場合、設計変数は要素内における材料2の体積比であるといえる。従って、有限要素メッシュで離散化された j 番目の要素について、設計変数 s_j ($j = 1, 2, \dots, N$) を以下のように定義する。

$$s_j = \frac{r_j}{r_0}, \quad 0 \leq s_j \leq 1 \quad (15)$$

つまり、この設計変数は、それぞれの有限要素において材料2の材料の占める割合を表しており、これが0または1に収束することで複合材料のトポロジーを示すことになる。なお、この設計変数を用いて単一材料の最適化を行う場合は、使用する材料定数を材料2に設定し、材料1の材料定数をそれぞれ0に設定すればよい。

(2) 材料モデル

材料表現法を用いたトポロジー最適化は、空隙 (void) と固体材料 (solid) の境界における不連続性から、'0-1' 整数値問題と呼ばれ、解の一意性と安定性に欠く不良設定問題となる。そこで、不良設定問題を良設定問題に置き換えるために、様々な材料モデルが提案されてきた。その代表的なものとして、hole-in-cell microstructures⁹⁾ や the layered-microstructures^{10),11)} などがあげられる。

一方、簡易な方法として SIMP 法¹²⁾ が知られており、これは連続的なべき関数によって不連続な '0-1' 間を内挿する手法である。SIMP 法では、有効ヤング係数 E_{eff} は、要素の密度を設計変数として以下のように表せる。

$$E_{\text{eff}} = (s)^\eta E_0, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (16)$$

ここで、下添え字 0 は、実材料の材料定数および密度を表している。また、 η は物理的意味を保証しないべき乗数である。しかし、本研究のように、熱応力係数を導入した条件のもとでは SIMP 法は望ましくない挙動を示すことが知られている⁸⁾¹⁴⁾。その原因は、図-2(a)で示すように SIMP 法では設計変数 s が 0 に近づくとき、ヤング係数 E の設計変数 s に対する勾配が 0 に限りなく近づくことにある。というのも、熱応力係数 β を前述の式 (5) のように定義しているが、この式を熱膨張係数 α の式に書き直すとヤング係数 E が分母に位置す

ることになる。このとき、設計変数 s が 0 に近づくとヤング係数 E も 0 に近づくことになり、結果として熱膨張係数 α が無限大に発散してしまう。

一方で、RAMP 法¹³⁾ (*Rational Approximation of Material Properties*) と呼ばれる、べき乗数とは違う形の定数によって不連続な '0-1' 間を内挿する方法もある。RAMP 法を用いた場合には、図-2 (b) 設計変数 s が 0 付近にあってヤング係数 E がある程度の値を持つため、熱膨張係数が発散するようなことはなく体積制約が守られる。よって、今回のような熱荷重が生じる問題には SIMP 法よりも RAMP 法が適しているといえる。ただ、いわゆる均質化法などと異なり、SIMP 法ある

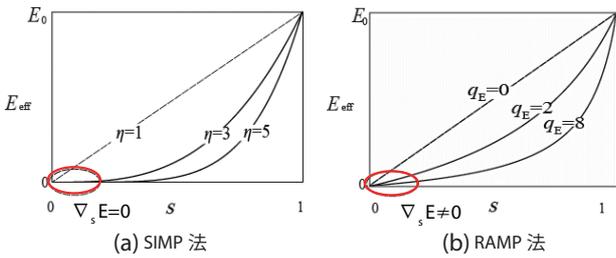


図-2 SIMP 法と RAMP 法

いは RAMP 法により内挿された材料では、'0-1' 間の値においては物理的な解釈を求めることはできないという欠点もある。また、同様の理由から、収束に至る過程で見られる 0-1 間の値、いわゆるグレースケールの状態に物理的な解釈を求めることもできない。しかし、その導入のしやすさと、構造依存荷重である熱荷重を考慮するという理由から、本研究では内挿には RAMP 法を用いることとした。

2 相材料を想定した場合の有効ヤング係数 E_{eff} の RAMP 法に式は以下のように表せる。

$$E_{eff} = \left\{ 1 - \frac{s}{1 + q_E(1-s)} \right\} E_1 + \left\{ \frac{s}{1 + q_E(1-s)} \right\} E_2 \quad (17)$$

ここで、添え字 1 と 2 は、それぞれ材料 1 と材料 2 の材料定数であることを意味する。 q_E は物理的意味を保証しない定数であり、この q_E を適切な値に設定することで、最適解への収束を早めるとともに、最終的に明確な '0-1' 配置を得ることができる。また、式 (17) では $E_1 \leq E_2$ となることを前提にしているが、 $E_1 > E_2$ となる材料を用いる場合、関数の方向を考慮して以下の式を用いる必要がある。

$$E_{eff} = \left(\frac{1-s}{1 + q_E s} \right) E_1 + \left(1 - \frac{1-s}{1 + q_E s} \right) E_2 \quad (18)$$

一方で、ヤング係数 E と異なり、熱応力係数 β のように、その値が大きい方が構造にとって不利になるようなパラメータの場合には、 $\beta_1 \leq \beta_2$ となる場合を次式

で表す。

$$\beta_{eff} = \left(\frac{1-s}{1 + q_\beta s} \right) \beta_1 + \left(1 - \frac{1-s}{1 + q_\beta s} \right) \beta_2 \quad (19)$$

逆に、 $\beta_1 > \beta_2$ の場合は次の式で表す。

$$\beta_{eff} = \left\{ 1 - \frac{s}{1 + q_\beta(1-s)} \right\} \beta_1 + \left\{ \frac{s}{1 + q_\beta(1-s)} \right\} \beta_2 \quad (20)$$

このようにパラメータの特性値とその値の大きさによって内挿関数を選択する材料モデルが本研究の提案するところである。

4. 最適化問題の設定

本研究では、材料体積量が一定という制約条件のもと、力学的外荷重 \mathbf{F}^m と熱応力による荷重 \mathbf{F}^{th} が両方同時に作用する場合に、その剛性を最大にするための最適化問題を新たに定式化する。前述のとおり、熱応力による荷重 \mathbf{F}^{th} が作用する場合は、剛性最大化問題とコンプライアンス最小化問題は等価にならない。そこで、本研究では一般的なコンプライアンスの式から熱応力による荷重 \mathbf{F}^{th} の影響を差し引いた以下のような最適化問題を定式化した。

$$\min f(\mathbf{s}) = (\mathbf{F}^m)^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F}^{th} \quad (21)$$

$$\text{subject to } h(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} s_i d\Omega - V_0 = 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}^m + \mathbf{F}^{th} \quad (23)$$

$$0 \leq s_i \leq 1 \quad (24)$$

ここで、式 (22) は体積制約条件であり、 V_0 は所与の材料体積である。いま、式 (21) について説明すると、これまでの問題ではコンプライアンスとして $\mathbf{F} \mathbf{u}$ が使われていたが、ここで提案する式は荷重ベクトルを一定に保った状態でコンプライアンスを最小化させるために、構造幾何の更新ごとに変化する \mathbf{F}^{th} の影響を取り除いたものである。以下では、この目的関数の感度の導出について記述する。

(1) 目的関数の感度

ここでは、式 (21) に示した目的関数を設計変数で微分して、感度を導出する。

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = 2\mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} - (\mathbf{F}^{th})^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} - \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{F}^{th}}{\partial s_i} \quad (25)$$

式 (23) の力のつり合い式についても同様に設計変数で微分して以下を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} = \frac{\partial (\mathbf{F}^{th} + \mathbf{F}^m)}{\partial s_i} \quad (26)$$

$$(27)$$

ここで、 \mathbf{F}^m は設計変数に依存しないので消去し整理すると以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{\text{th}}}{\partial s_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} \right) \quad (28)$$

次に、式(28)を用いて式(25)の $\partial \mathbf{u} / \partial s_i$ を消去し、また、 $(\mathbf{F}^{\text{th}})^T \mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{u}^{\text{th}})^T$ であることから式を整理すると次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = (\mathbf{u}^T - (\mathbf{u}^{\text{th}})^T) \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{th}}}{\partial s_i} - (\mathbf{u}^T - (\mathbf{u}^{\text{th}})^T) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} \quad (29)$$

ここで、 $\mathbf{u}^m + \mathbf{u}^{\text{th}} = \mathbf{u}$ であることを考慮すると最終的に以下のように感度が求まる。

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = (\mathbf{u}^m)^T \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{th}}}{\partial s_i} - (\mathbf{u}^m)^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} \quad (30)$$

なお、参考までに目的関数として一般的なコンプライアンス ($f = \mathbf{F}^T \mathbf{u}$) を用いた場合の感度式は、以下のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = 2\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{th}}}{\partial s_i} - \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} \quad (31)$$

事項の最適化計算例では、これらの異なる感度式を用いて最適化計算を行い比較する。

5. 最適化計算例

(1) 計算例 1

ここでは、具体的なトポロジー最適化計算に先立ち、複合材料の材料パラメータに無秩序さがある場合において、その力学的挙動が正しく再現できているかを検証する。前述のとおりコンポジットの力学的挙動は複雑であり、その結果、得られる最適化トポロジーも理解するのが困難な場合が多い。そこで、まず極力簡単なコンポジット構造を用いて所望の力学的応答を示すか確認し、その結果を踏まえて具体的な最適化計算例を行う。まず、対象としたのは、図-3の示すように上下に物性の異なる2つ材料を配置した片持ち構造である。ここでは、8節点四辺形要素を用い、要素分割数は縦に20、横に40とし合計800要素とした。

用いた材料パラメータは表-1のとおりであるが、それぞれチタンとモリブデンを想定している。上側に熱膨張係数が大きい材料1を、下側にヤング係数が大きい材料2を配置した。外荷重は与えることなく、温度上昇 ($\Delta T = +300^\circ\text{C}$) のみを与えたときの変形の様子を見てみる。ここでは、熱膨張係数の大きい材料1の方がより大きな膨張を示すものと推測できる。

図-4は得られた変形図に、 x 軸方向応力図 (σ_{xx}) を重ねて表示したものである。この図から、片持ち構造は想定どおり下側に反り曲がり、熱膨張係数 $\alpha(s_i)$ の大きさが正しく反映されていることが分かる。また、応

力に関してはヤング係数 E の大きい材料2の方が大きくなっており、このことから、熱応力係数 $\beta(s_i)$ の大きい材料の方が熱応力が大きくなるという特性も再現されていることが分かる。よって、2つのパラメータを1つにまとめて表現した熱応力係数 β を導入したときも、熱に対する材料の挙動は正しく表現出来ているといえる。

表-1 計算例 1, 2: 使用材料

材料番号	ヤング係数 E	ポアソン比	熱膨張係数 α
1	106(GPa)	0.3	$8.4 \times 10^{-6} (\text{ }^\circ\text{C}^{-1})$
2	327(GPa)	0.3	$5.2 \times 10^{-6} (\text{ }^\circ\text{C}^{-1})$

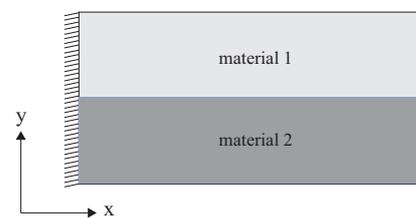


図-3 構造モデル

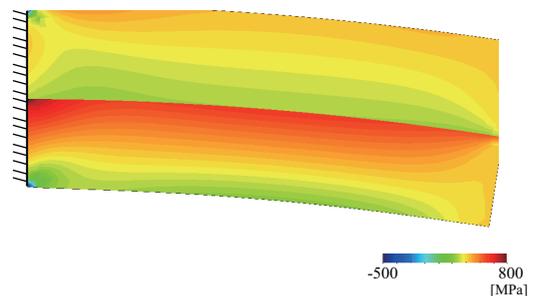


図-4 構造モデルに $\Delta T = +300^\circ\text{C}$ を与えたときの変形図および x 軸方向応力図 (σ_{xx})

(2) 計算例 2

以下の最適化計算では、図-5(a)の構造モデルを使用した。このモデルは、Rodrigues と Fernandes の論文¹⁾ で用いられたモデルである。8節点四辺形要素を用い、要素分割数は縦に40、横に60とし合計2400要素とした。両端の黒い領域は、設計変数を常に1とし、応力の特異点を避けるために設定した非設計領域である。この非設計領域は、文献¹⁾に従って応力の特異点を避けるために設定している。灰色の領域が設計領域を表し、この領域の最適構造を求める。使用した材料は表-1のとおりとし、材料1にチタン、材料2にモリブデンを想定してパラメータを設定した。チタンとモリブデンの材料比は1:1とした。

ここでは温度変化 $\Delta T = +300^\circ\text{C}$ と図-5 (a) に示す外荷重 $F^m = 0.3\text{kN}$ を与えたときのトポロジー最適化を行った。図-5 (b), (c) は、従来のコンプライアンスに従って最小化したものと、本論文で提案したコンプライアンスを最小化した結果を示している。まず、図-5 (b) については、外荷重に対して剛性の高い材料 2 がアーチのようなトポロジーを呈した。また、よく観察すると、図-5 (b) は熱膨張係数が高い材料 1 が体積膨張しやすいように構造上下面に位置していることがわかる。一方、図-5 (c) について見てみると外荷重がある下部のトポロジーは、同図 (b) と同様にアーチのような材料配置を示したが、上部は材料 2 が支配的となりかなり異なるトポロジーとなった。このように、複雑なトポロジーを示すのは複合材料・複合構造の特徴であるといえる。

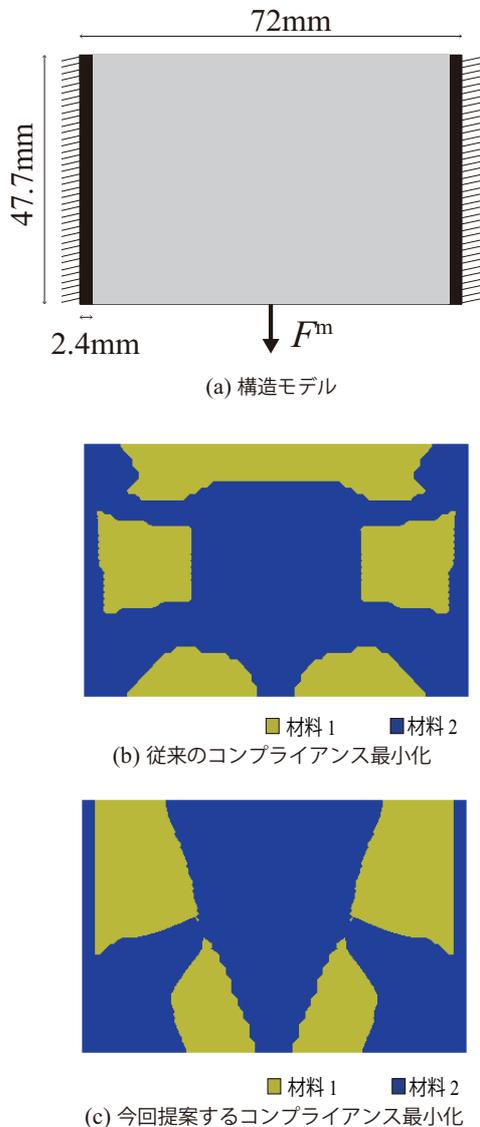


図-5 $\Delta T = +300^\circ\text{C}$ 時の最適化結果 (複合材料)

表-2 計算例 3: 使用材料

材料番号	ヤング係数 E	ポアソン比	熱膨張係数 α
1	70(GPa)	0.3	$15.0 \times 10^{-6} (\text{C}^{-1})$

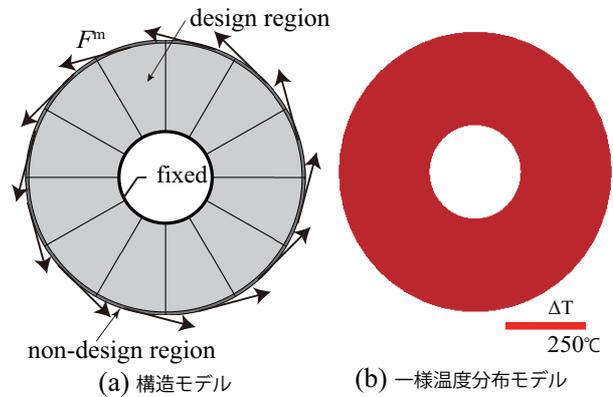


図-6 構造モデルと温度分布図

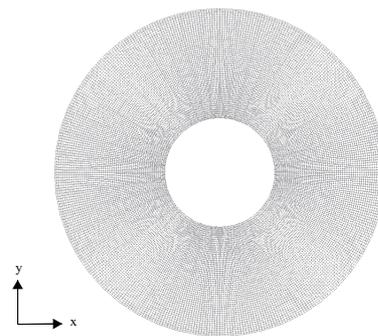


図-7 有限要素メッシュ

このように複合材料の場合の最適化されたトポロジーを紐解くのは複雑で、最適なトポロジーを定性的に予測するのが困難な構造問題となり得る。

(3) 計算例 3

最後に、単一材料で構成された円形の構造に対して、従来のコンプライアンスを最小化したものと、本研究で提案したコンプライアンスを最小化したものについて検証する。また、ここでは、力学的外荷重のみを与えた場合と、外荷重および熱荷重を与えたときの最適化構造について考察する。

使用した構造モデルは図-6 (a) である。材料パラメータは表-2 のとおりである。これまでと同様に 8 節点四辺形要素を使用し、図-12 に示すようにメッシュ分割として 36720 要素を用いた。この円形構造に、外側の 12 地点で荷重を与えて最適化を行った。温度上昇の与え方については、図-6 (b) のように一様な温度上昇

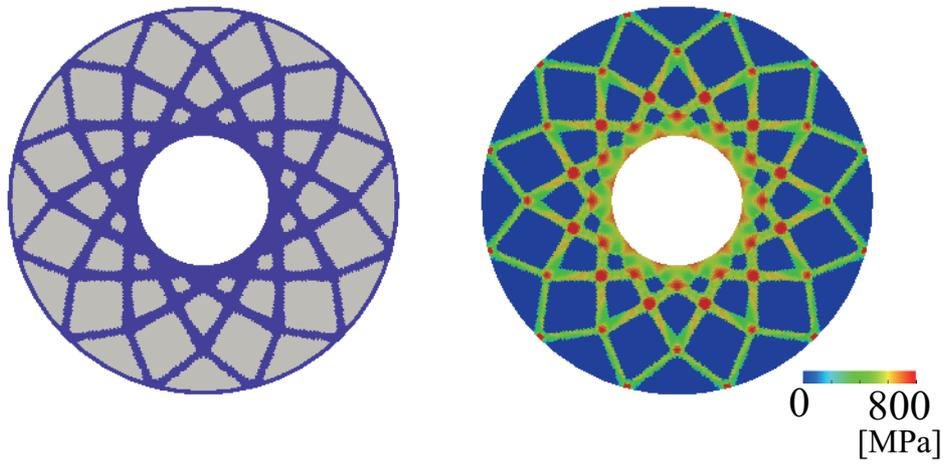


図-8 $F^m = 0.2\text{kN}$, $\Delta T = \pm 0^\circ\text{C}$ を与えた場合の最適構造およびミーゼス応力図（従来のコンプライアンス最小化）

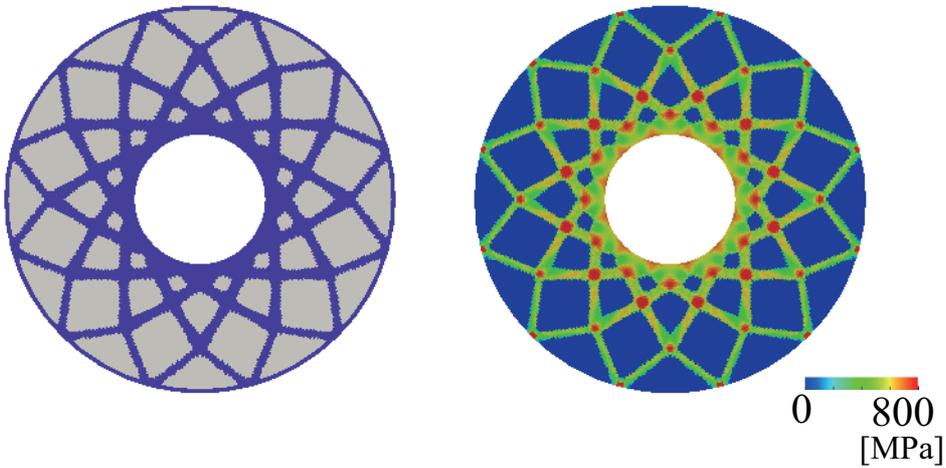


図-9 $F^m = 0.2\text{kN}$, $\Delta T = \pm 0^\circ\text{C}$ を与えた場合の最適構造およびミーゼス応力図（提案するコンプライアンス最小化）

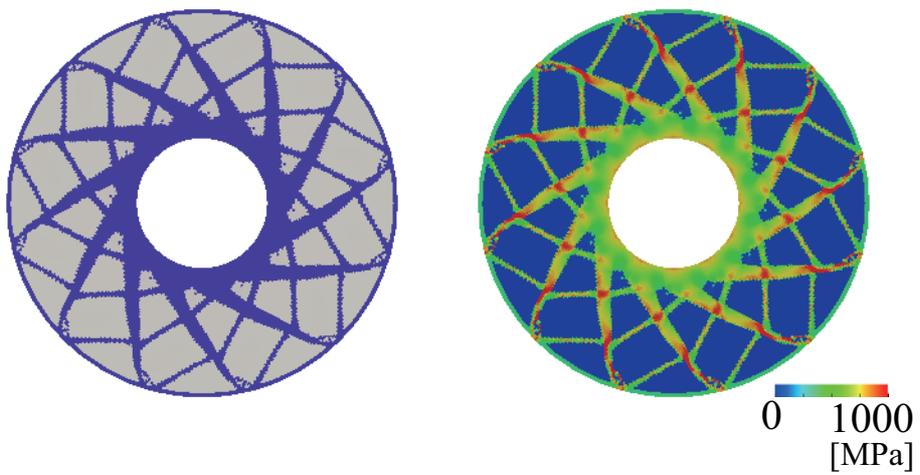


図-10 $F^m = 0.2\text{kN}$, $\Delta T = +250^\circ\text{C}$ を与えた場合の最適構造およびミーゼス応力図（従来のコンプライアンス最小化）

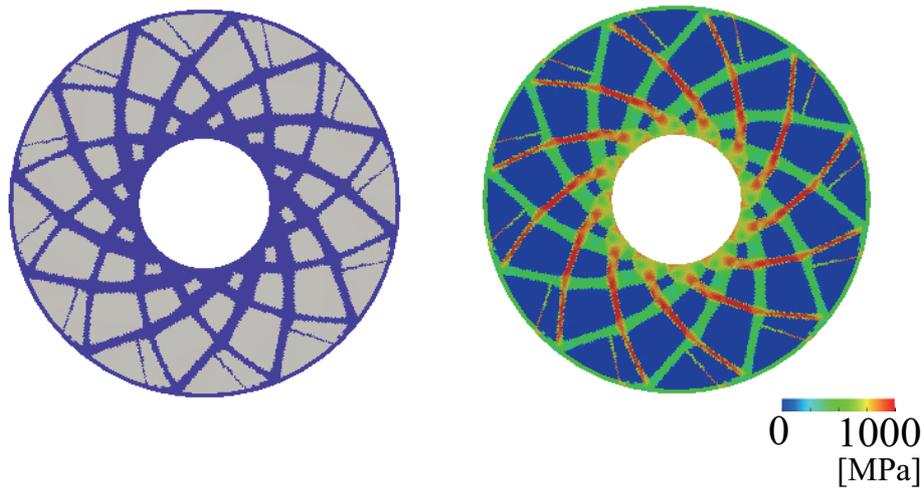


図-11 $F^m = 0.2\text{kN}$, $\Delta T = +250^\circ\text{C}$ を与えた場合の最適構造およびミーゼス応力図（提案するコンプライアンス最小化）

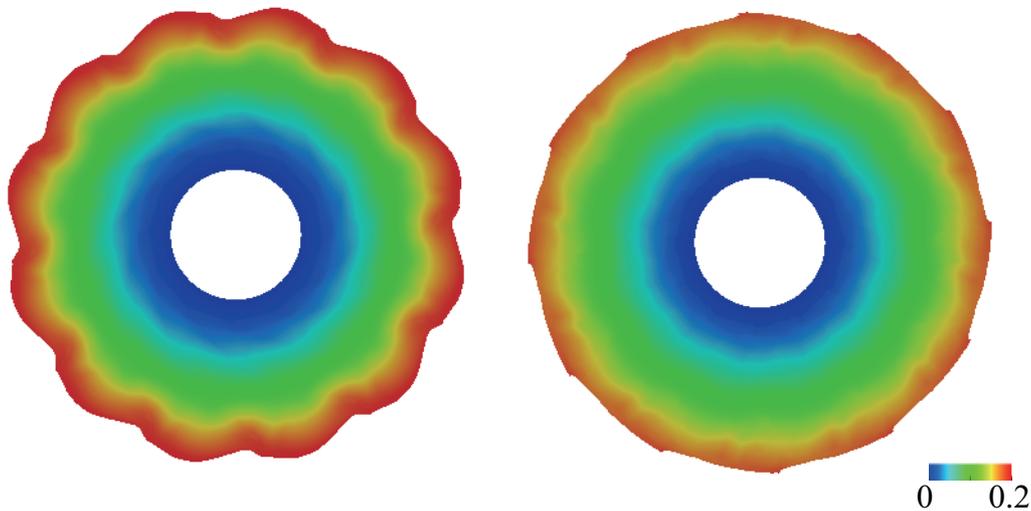


図-12 $F^m = 0.2\text{kN}$, $\Delta T = +250^\circ\text{C}$ を与えた場合の最適化構造の変形図と平均変位分布図：(左) 従来のコンプライアンス最小化, (右) 提案するコンプライアンス最小化

($\Delta T = +250^\circ\text{C}$) を与えた。

まず、外荷重のみを与えた最適化構造とそのときのミーゼス応力図を図-8 および図-9 に示す。図から明らかかなように熱応力による荷重が載荷されていない場合は、2つの結果は一致することわかる。これは、提案したコンプライアンスおよび導出した感度の式も従来のコンプライアンス最小化のものと同じ形になることから当然の結果とも言える。なお、この場合は、荷重を与えた点に対して対称になっていることが確認できる。次に、外荷重に加えて一様な温度上昇を与えたときの最適化トポロジーとミーゼス応力図を図-9 に示す。従来のコンプライアンス最小化では荷重点から見て左右の対称性が大きく崩れていることがわかる。また、図-12 は変位を 20 倍に拡大した変形図であり、その色は変位ベクトルの平均である。これを見てわかるとおり、従来の

コンプライアンス最小化による結果では熱応力によって体積膨張を促進するような放射状の変形を示し、そこに外荷重に対する補強として太い斜めの部材が伸びるようなトポロジーとなっている。その結果、外周付近で大きな変形が生じていることがわかる。一方、今回提案したコンプライアンス最小化では熱応力を与えない場合の最適化トポロジーをほぼ保持していると言える。このように依然として変形が小さくなるトラス構造のようなトポロジーを保持できているのは、提案したコンプライアンスが力学的挙動を正しく評価できているためであると考えられる。この結果は、図-12 の変形図で分かるように変形量も小さく、もとの円形状もそれほど乱していない。

これらの結果から、熱応力と力学的外荷重を同時に受ける構造に対しては、従来のコンプライアンス最小

化は剛性最大化問題と等価ではなく、設計者の意図に反して構造自体の剛性が低下してしまう結果となることが示された。

6. 結論

本研究では、力学的外荷重と熱負荷による荷重が同時に作用する場合の剛性最大化問題を取り扱った。これまでの多くの研究では、これら2つの荷重が同時に作用する条件下で剛性を最大にする問題を取り扱っているが、そのほとんどは従来から用いられているコンプライアンス (Fu) を最小化している。しかし、本論文では、このような条件下における剛性最大化はコンプライアンス最小化問題と等価ではないことを指摘し、さらにそれに代わる新しいコンプライアンスを定式化した。また、そのコンプライアンスを基本として感度の導出を行った。また、従来から用いているコンプライアンスを最小化すると、熱負荷による荷重は温度増分が正の場合、構造が熱膨張するような変形パターンが見られ、結果として構造の剛性が低下するという目的とは逆の結果になることを確認した。そのため、温度増加が大きい問題ではその影響が強くなるため注意が必要であることがわかった。

参考文献

- 1) H, Rodrigues., H, Fernandes.: A material based model for topology optimization of thermoelastic structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp.1951–1965, 1995.
- 2) Q, Li., G.p, Steven., Y.M, Xie.: Displacement minimization of thermoelastic structures by evolutionary thickness designs, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 179, pp.361–378, 1999.
- 3) Q, Li., G.p, Steven., Y.M, Xie.: Thermoelastic topology optimization for problems with varying temperature fields, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.24, pp.347–366, 2001.
- 4) C. Jog.; Distributed-parameter optimization and topology design for non-linear thermoelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 132, No. 1-2, pp. 117-134, 1996.
- 5) B. Wang, J. Yan, and G. Cheng, Multi-objective concurrent topology optimization of thermoelastic structures composed of homogeneous porous material, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 47, No. 4, pp. 583-597, 2013.
- 6) Joshua D. Deaton, Ramana V. Grandhi.: Stress-based Topology Optimization of Thermal Structures, *Proceedings of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013.
- 7) Joshua D. Deaton, Ramana V. Grandhi.: Topology Optimization of Thermoelastic Structures using Stress-based Design Criteria, *AIAA Journal*, 2014.
- 8) T, Gao., W, Zhang.: Topology optimization involving thermo-elastic stress loads, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 42, pp.725–738, 2010.
- 9) Bendsøe, M.P., Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 71, pp.197–224, 1988.
- 10) Bendsøe, M.P.: Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optim.*, Vol. 1, pp.193–202, 1989.
- 11) Olhoff, N., Lurie, K.A., Cherkaev, A.V., Fedorov, A.: Sliding regimes of anisotropy in optimal design of vibrating plates, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 79, pp.361–378, 1981.
- 12) Zhou, M., Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 89, pp.309–336, 1991.
- 13) M, Stolpe., K, Svanberg.: An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 22, pp.116–124, 2001.
- 14) M, Bruyneel., P, Duysinx.: An Note on topology optimization of structures including self-weight, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 29(4), pp.245–256, 2005.

(2015. 6. 23 受付)

Basic Study for Topology Optimization Considering Thermal Stresses

Tomo ICHIKAWA, Junji KATO and Takashi KYOYA

The present study addresses thermoelastic topology optimization of a minimum compliance problem. It is well-known that the thermal loading depends on the material stiffness coefficient and the thermal expansion coefficient; this causes physically unrealistic situation if both coefficients are regularized in a conventional interpolation scheme. This study applies a specific regularization, so-called the thermal stress coefficient to avoid the problem. This approach is examined by a series of numerical examples for porous and composite materials.