

超弾性複合材料の分離型マルチスケールトポロジー最適化

Multi-scale topology optimization for hyperelastic composites

applying a decoupling multi-scale analysis

加藤 準治¹, 谷地 大舜¹, 西澤 峻祐¹, 高瀬 慎介¹, 寺田 賢二郎², 京谷 孝史¹

Junji KATO, Daishun YACHI, Shunsuke NISHIZAWA, Shinsuke TAKASE,

Kenjiro TERADA and Takashi KYOYA

¹ 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

² 東北大学災害科学国際研究所 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)

The present study proposes multi-scale topology optimization for a two-phase composite considering hyperelasticity to minimize the end compliance of a macrostructure based on a decoupling multi-scale analysis. Much attention is paid to multi-scale topology optimization for its effectiveness in the field of the advanced material design dealing with a highly complex material behavior. However, most of the researches dealing with multi-scale topology optimization assume linear elasticity to avoid its complicated mathematical formulation and huge computational costs. The present study challenges to develop multi-scale topology optimization considering hyperelastic composite materials. In this context, we propose a two-scale adjoint sensitivity analysis utilizing a localization process.

Key Words: multi-scale topology optimization, adjoint sensitivity analysis, decoupling multi-scale analysis, hyperelasticity, homogenization, localization

1. はじめに

構造物の力学的挙動は、材料のマイクロ領域における構成材料の配置や形状、寸法などの幾何学的特性に強く依存し、その依存性は材料の非線形領域においてより顕著になることが知られている。また、構造用材料のほとんどはマイクロ的な視点から見れば複合材料であるため、異種材料をうまく複合化することによって材料の力学的挙動をある程度制御することは可能である。そのため、材料開発の分野では全体構造（マクロ構造）の力学的性能を目的どおりに制御する、あるいは最大限に引き出す、最適な材料微細構造（マイクロ構造）を見つけるために多くの時間とエネルギーが費やされている。その具体的な方法は、構成材料のパラメータを適宜変化させて材料実験を行い力学的性能の感度を把握したり、新たな材料を混入してその性能変化を観察するのが一般的であろう。しかし、現実には数多くのパラメータが存在するため、それを材料実験だけで解決するには膨大な時間とコストを要することとなる。し

かも、それによって得られたマイクロ構造の最適性が保証される訳ではない。このような背景から、近年CAEを活用して合理的に材料開発を行うようになってきており、中でも構造最適化理論を駆使した材料設計法の開発が注目されている。

ところで、最近3Dプリンターによる生産・技術が現実のものとなっている。3Dプリンターは積層造形を行う装置で、これまで製作が困難とされていた複雑な形状でも一体造形できる点が長所の一つである。現在では、3Dプリンターを使って実用に耐え得る構造部材や機械部品を生産するための技術開発が盛んに進められており、これが本格的に実用化されれば、生産システムの変革はもとより社会・経済への影響も大きいとされている。

また、トポロジー最適化による設計ツールと3Dプリンターを融合した新しいものづくり体系の可能性・将来性が議論されている^(1,2,3,4)。この理由は、両者の長所を掛け合わせることで、製作面よりも構造性能に重点をおいたものづくりが可能になるためである。もちろん、3Dプリンターによる製作品については未だ材料強度に対する信頼性が乏しく、今後益々の研究開発が必要であることは言うまでもない。

しかしながら、最近になって金属のマイクロ領域において結晶方位や結晶粒径を制御しながらマクロ構造を

* 原稿受付 2015 年 10 月 03 日, 改訂年月日 2015 年 11 月 25 日, 発行年月日 2016 年 01 月 18 日, ©2016 年 日本計算工学会.
Manuscript received, October 03, 2015; final revision, November 25, 2015; published, January 18, 2016. Copyright ©2016 by the Japan Society for Computational Engineering and Science.

自由に製作するための技術報告が聞かれるようになってきた^(5,6,7,8)。その技術が確立されれば、材料に対する信頼性が増し、いよいよ本格的な3Dプリンターによる生産が可能になることを示唆している。これらの動向から、マクロ構造のみならずマイクロ構造も同時に最適化できる手法を開発することによって、材料のマイクロ構造からマクロ構造まですべて最適化された究極の構造を得ることできるようになると考えられる。

このような背景を踏まえ、本研究はマクロ構造の力学的性能を最大にするために、複合材料のマイクロ構造とマクロ構造のトポロジーを同時に最適化する手法の開発を行う。特に本研究では、「実在するすべての材料は厳密には非線形な力学的挙動を示す」という物理的視点に立って、上記の目的に加えて非線形構造問題を扱うことが可能な汎用性の高い手法の構築に挑戦する。

ところで、近年マイクロおよびマクロ構造のトポロジーを同時に最適化する手法の研究開発が進められるようになってきた。代表的なものでは、Rodrigues et al.⁽⁹⁾が実施した線形弾性体の剛性最大化問題に関する研究成果がある。この手法は、マクロ構造内の任意の評価点におけるマイクロ構造がその評価点周辺では周期性を満たすものと仮定し、一つのマクロ構造に多数の異なるマイクロ構造が存在することを許容したものである。しかし、実際に有限多数のマイクロ構造を有するマクロ構造を製作とした場合、隣接する評価点間でマイクロ構造トポロジーが不連続となる箇所が存在することとなり、厳密にはそこでの周期性は満たされない。これに対して、Niu et al.⁽¹⁰⁾は、低次固有振動数の最大化を目的としてマイクロとマクロ構造両方のトポロジーの同時最適化法を提案する中で、「マイクロ構造はマクロ構造全体において一つ（一種類）だけ存在する」とした問題設定を行っている。つまり、マクロ構造のいずれの点においてもマイクロ構造の周期性が満たされるという条件を用いたものである。本研究でもこれと同様にマクロ構造全体で一つのマイクロ構造だけが存在するという問題設定を行っている。

ところで、上記のようなマイクロ-マクロ連成問題を解くためには、均質化法を基本としたマルチスケール解析法の導入が必要となる。均質化法によるマルチスケール解析法については、これまで多くの研究成果が報告され、現在では材料・幾何学的非線形特性を考慮に入れた様々な解析手法が提案されている^(11,12,13,14)。これらは、マイクロおよびマクロ双方の境界値問題の精度を高めるために2変数境界値問題をマイクロ-マクロを相互にやり取りしながら同時に解くもので「マイクロ-マクロ連成型のマルチスケール解析法」と呼ばれており、理論的にも確立された信頼できる手法である。しかし、これらの解析手法は理論的には明快であるものの、計算量が膨大となることから実設計に応用されることは少ない。そのため、Niu et al.⁽¹⁰⁾の最適化手法をはじめ、「マイクロ-マクロ連成型のマルチスケール解析法」を基本とする最適化手法は、線形弾性問題であ

ば適用可能であるが、それを非線形構造問題へ拡張することは、理論を複雑化するだけでなく計算量が著しく増加するため、実用上の課題が大きい。

なお、著者らの知る限りでは、連成型マルチスケール解析法を基本としたマルチスケールトポロジー最適化の研究のうち非線形構造問題を扱ったものはNakshatrala et al.⁽¹⁵⁾の研究報告しか見当たらない。Nakshatrala et al.⁽¹⁵⁾は、超弾性Neo-Hookeanモデルを用いた場合のマルチスケールトポロジー最適化手法を提案しているが、やはり計算量が膨大となることからmultilevel nested Newton法と称される近似法⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾を取り入れて計算量を減らし、さらに80個のプロセッサを用いた並列計算によって計算を実行可能なものになっている。しかし、今後弾塑性モデルのように経路依存型の構造最適化問題への拡張も視野に入れると、連成型マルチスケール解析法を基本としたトポロジー最適化のこれ以上の発展は困難であると思われる。

ちなみに、マイクロ構造単独、あるいはマイクロ-マクロ構造両方のトポロジーを最適化する問題では、「直交異方性のマクロ材料特性を変数にしてマクロ構造の最適化問題を先に解き、得られたマクロ材料特性と等価な特性を与えるマイクロ構造のトポロジーを逆均質化法によって決定する方法」も有効であると考えられる。しかし、これは線形問題においてのみ適用可能なアプローチであり、非線形構造問題を前提とする本研究では使えない。

このような背景から、Kato et al.⁽¹⁸⁾、加藤ら⁽¹⁹⁾、谷地ら⁽²⁰⁾は「分離型マルチスケール解析法」と呼ばれる計算コストを大幅に削減できる新しい手法を取り入れたマルチスケールトポロジー最適化手法を提案している。分離型マルチスケール解析法は、Terada et al.⁽²²⁾および寺田ら⁽²³⁾、Watanabeら⁽²⁴⁾によって開発されたもので、マイクロ-マクロ2変数境界値問題を分離して解く、理論的にも明快な近似的手法である。この手法では、マクロ構成則を仮定した上で「数値材料実験」と称する均質化解析の結果からマクロ構成則の材料パラメータを同定するため、マクロ解析および局所化解析を少ない計算負荷で効率的に解くことができ、さらに様々な非線形材料モデルおよび幾何学的非線形問題にも同じ枠組みが適用可能である点で汎用性に優れている。

文献^(18,19,20)の研究報告は、分離型マルチスケール解析法を最適化問題に導入する基礎的研究であるため、線形弾性体を前提としたものであった。次いで、加藤ら⁽²¹⁾は、分離型マルチスケール解析法を用いたトポロジー最適化の研究において、はじめて非線形力学問題に適用可能な手法の開発を実施している。ここでは、マイクロ構成則に等方性超弾性体を仮定したMooney-Rivlin則、マクロ構成則には異方性超弾性体であるKaliske則を適用している。しかし、加藤ら⁽²¹⁾はマクロ構造の挙動を考慮しつつも設計対象としてはマイクロ構造のトポロジーに限定している。そこで、本研究では加藤ら⁽²¹⁾の手法をベースにマイクロとマクロ構造の両方のトポ

ジーを同時に最適化する手法に拡張するものである。

本最適化問題では、マイクロおよびマクロの材料体積量が一定という条件のもと、目的関数は Nakshatrala et al.⁽¹⁵⁾ と同様にマクロ構造のエンドコンプライアンス最小化とした。以下では、有限変形理論を踏まえた分離型マルチスケール解析法の概要を述べた上で、使用材料モデルおよび本最適化問題の設定、さらに分離型マルチスケール解析を用いた場合の一連の解法および感度解析について提案する。ただし、分離型マルチスケール解析法の説明については、加藤ら⁽²¹⁾の研究報告と重複することから、ここでは付録に記述することとした。最後にいくつかの数値解析例を用いて本手法の性能検証を実施する。

2. 材料構成則

本研究では、分離型マルチスケール解析において、マイクロ境界値問題およびマクロ境界値問題で用いる構成則をそれぞれマイクロ構成則およびマクロ構成則と呼ぶ。ここでは、そのマイクロ構成則およびマクロ構成則として採用する超弾性構成則についてそれぞれ提示する。なお、マイクロ構成則には等方性の超弾性体モデルを、マクロ構成則にはマイクロ構造の非均質性に起因する異方性を再現するために異方性の超弾性体モデルを用いている。なお、以下では簡単のため、マイクロ変数とマクロ変数を区別せずにそれぞれの構成則の定式化を行うこととする。

2.1 等方性超弾性構成則 等方性超弾性体の弾性ポテンシャル関数は、観測者に依存しない客観性を持つことから変形勾配 \mathbf{F} あるいは右 Cauchy-Green テンソル $\mathbf{C} (= \mathbf{F}^T \mathbf{F})$ の関数で表すことができる。

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{C}) \quad (1)$$

ゴム材料の非圧縮性や微圧縮性を扱いやすくするために、近年では超弾性のポテンシャル関数を体積変形と等容変形の成分に分離することが多い。本研究でも、ポテンシャル関数 Ψ を体積変形に起因する W_{vol} と等容変形に起因する W_{iso} との和として次式のように表すことにする。

$$\Psi = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (2)$$

ここで、 $J = \det \mathbf{F}$ はヤコビアン、 $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ は右 Cauchy-Green テンソルの等容変形成分をそれぞれ示している。また、 $\bar{\mathbf{F}}$ は変形勾配 \mathbf{F} の等容変形成分であり、次式で表される。

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (3)$$

ポテンシャル関数の体積成分 $W_{\text{vol}}(J)$ の具体形はスカラーパラメータ D を用いた次式として与える。

$$W_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{D} (J - 1)^2 \quad (4)$$

なお、このモデルでは、極限操作 $D \rightarrow 0$ により非圧縮状態 ($J = 1$) に近づけることができ、有限要素解析に

においてもこの操作によって非圧縮性を模擬することが多い。

一方、等容成分 $W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}})$ には Mooney-Rivlin モデルを採用し、 $\bar{\mathbf{C}}$ の第1, 第2不変量を用いた次式を定義する。

$$\begin{aligned} W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) &= W_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \\ &= C_1(\bar{I}_1 - 3) + C_2(\bar{I}_2 - 3) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 \bar{I}_1, \bar{I}_2 は、次式で示される $\bar{\mathbf{C}}$ の第1, 第2不変量であり、 C_1, C_2 はそれらに関する材料パラメータである。

$$\bar{I}_1 = \text{tr} \bar{\mathbf{C}} \quad (6)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \bar{\mathbf{C}} - \text{tr} \bar{\mathbf{C}}^2) \quad (7)$$

弾性ポテンシャルの定義より、第2 Piola-Kirchhoff 応力 (以下、第2PK 応力と呼ぶ) は、ポテンシャル関数を右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} で微分することで得られる。

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}_{\text{vol}} + \mathbf{S}_{\text{iso}} \quad (8)$$

ここで、式(4)より、体積変形に関する応力成分は次式で与えられる。

$$\mathbf{S}_{\text{vol}} = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial \mathbf{C}} = J \frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (9)$$

また、式(5)より、等容変形に関する応力成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{iso}} &= 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \left(2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right) : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= (J^{-2/3} \mathbb{Q}) : \left(2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right) = I_3^{-1/3} \mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $I_3 = \det \mathbf{C}$ であり、 \mathbb{Q} と $\bar{\mathbf{S}}$ はそれぞれ次のように定義した。

$$\mathbb{Q} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (12)$$

ここで、 \mathbb{I} は4階の恒等テンソルであり、2階の恒等テンソル $\mathbf{1}$ を用いて $\mathbb{I} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ と表せる。また、不変量 \bar{I}_1, \bar{I}_2 の $\bar{\mathbf{C}}$ による偏微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{1} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = (\bar{I}_1 \mathbf{1} - \bar{\mathbf{C}}) \quad (14)$$

2.2 異方性超弾性構成則 本研究では、Kaliske⁽²⁶⁾ および Kaliske and Schmidt⁽²⁷⁾ により提案された異方性超弾性体構成則をマクロ構成則として採用する。この材料モデルを採用した理由は、当該材料モデルがマイクロ材料モデルである Mooney-Rivlin 則を基本に発展させたものであることからこれらの材料モデルの間に親和性があるためである。

Kaliske⁽²⁶⁾ および Kaliske and Schmidt⁽²⁷⁾ は、繊維強化複合材料の異方性は繊維の方向を示す単位ベクトル \mathbf{A} , \mathbf{B} によって特徴づけられるものと仮定し、ポテンシャル関数を次のように定義している。

$$\Psi = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (15)$$

ここで、 $W_{\text{vol}}(J)$ は前節同様に式 (4) として定義されている。 $W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ は $\bar{\mathbf{C}}$ の不変量を用いた以下の具体形で与えられる。

$$\begin{aligned} W_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) &= W_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, \bar{I}_5, \bar{I}_6, \bar{I}_7, \bar{I}_8) \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i (\bar{I}_i - 3)^i + \sum_{j=1}^3 b_j (\bar{I}_2 - 3)^j \\ &+ \sum_{k=2}^6 c_k (\bar{I}_4 - 1)^k + \sum_{l=2}^6 d_l (\bar{I}_5 - 1)^l \\ &+ \sum_{m=2}^6 e_m (\bar{I}_6 - 1)^m + \sum_{n=2}^6 f_n (\bar{I}_7 - 1)^n \\ &+ \sum_{o=2}^6 g_o (\bar{I}_8 - \varsigma)^o \end{aligned} \quad (16)$$

ここで \bar{I}_i ($i = 1, 2, 4, \dots, 8$) は、式 (13), 式 (14) と次式で与えられる $\bar{\mathbf{C}}$ の不変量を示し、 $a_i \sim g_o$ は、それらに関する材料パラメータである。

$$\bar{I}_4 = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A} \quad (17)$$

$$\bar{I}_5 = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{A} \quad (18)$$

$$\bar{I}_6 = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} \quad (19)$$

$$\bar{I}_7 = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{B} \quad (20)$$

$$\bar{I}_8 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} \quad (21)$$

なお、 $\varsigma = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$ である。

また、等方性の場合と同様に、エネルギー関数を右 Cauchy-Green テンソルの等容変形テンソル $\bar{\mathbf{C}}$ で偏微分することにより、第 2PK 応力の一般形が式 (9), 式 (10) で得られ、異方性では式 (10) 中の $\bar{\mathbf{S}}$ が次式のように定義できる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \\ &+ 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_5} \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_6} \frac{\partial \bar{I}_6}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \\ &+ 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_7} \frac{\partial \bar{I}_7}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_8} \frac{\partial \bar{I}_8}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、各不変量 \bar{I}_i ($i = 1, 2, 4, \dots, 8$) の $\bar{\mathbf{C}}$ による偏微分は、式 (13), 式 (14) に加え、以下のように表される。

$$\frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{A} \otimes \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_6}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_7}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{B} \otimes \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_8}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad (27)$$

3. マルチスケールトポロジー最適化

本手法は前述のとおり、マイクロ構造トポロジーの最適化に加え、それを内部構造に持つマクロ構造のトポロジーも同時に最適化するものである。強調すべき特徴はマルチスケール構造解析の部分において分離型の解析法を適用しているため、これにより大幅な計算コストの削減が可能になることである。本節では分離型マルチスケール解析を導入したトポロジー最適化問題を定式化するとともに、その解法について提案する。

まず、具体的な定式化に先立ってマイクロ構造とマクロ構造のトポロジーを定義するために、それぞれ独立したマイクロ設計変数とマクロ設計変数を導入する必要がある。以下では、マイクロおよびマクロ設計変数の定義とそれぞれのポテンシャル関数の正則化について説明し、続けてそれに付随した最適化問題の定式化と感度導出法の提案を行う。

3.1 ミクロ設計変数とミクロポテンシャル関数の正則化

トポロジー最適化は連続体内の材料配置を最適化する手法であり、その基本概念は、設計空間において任意の点 x が材料の存在する領域 (Ω_s) に位置するかどうかでその位相を決定することにある。特性関数 $\chi(x)$ を用いてそれを表すと以下のように書くことができる。

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{no material} & : \forall x \in \Omega_s \setminus \Omega_m \\ 1 & \rightarrow \text{material} & : \forall x \in \Omega_m \end{cases} \quad (28)$$

しかし、これは '0-1' 整数値問題と呼ばれる解の一意性と安定性に欠く不良設定問題となり、そのままでは最適解を得ることはできない。そこで、不連続な '0-1' 間を連続関数で内挿し、勾配基本法による最適化が適用可能な良設定問題に置き換える方法が取られる。この操作を正則化と言ひ、これまで様々な方法が提案されてきた。それらの正則化のうち、べき関数で内挿補間を行う SIMP 法⁽²⁸⁾ が単純かつ最も計算量が小さい方法として広く使われている。

本研究では、Nakshatrala ら⁽¹⁵⁾ と同様に SIMP 法 の概念を取り入れてマイクロ構造における設計変数を定義し、また、材料応答を担うポテンシャル関数をそれにより正則化した。なお、本来 SIMP 法では単一の多孔質材料を扱うものであるが、本手法では 2 種類の異なる材料から構成される複合材料を対象とするため、これをそのまま適用することはできない。そこで、SIMP 法 の概念を複合材料へ拡張した 2 相材料最適化⁽²⁹⁾ を採用した。2 相材料最適化は、SIMP 法における void と solid をそれぞれ phase-1 と phase-2 の固体材料で置き換えた方法である。この手法により、マイクロ構造が異なる 2 種類の材料 phase-1 と phase-2 から構成されるとしたとき、マイクロ設計変数 s_i はユニットセル内の各有限要素 i における phase-2 の材料体積比として定義される。すなわち、 s_i は 0-1 間の値を持ち、 $s_i = 0$ であれば phase-1 が要素 i を占め、 $s_i = 1$ であれば phase-2 がその要素を占めることを意味する。また、 $0 < s_i < 1$ の場合は、2 つの材料が混ざり合った状態と考える。

上記の設計変数を用いて、(有効)マイクロポテンシャル関数を次式のように内挿近似する。

$$\Psi_m = (1 - s_i^\eta)\Psi_1 + s_i^\eta\Psi_2 \quad (29)$$

ここで、 Ψ_1 、 Ψ_2 は phase-1, phase-2 のポテンシャル関数をそれぞれ示し、これらは等方性超弾性の式 (2) で定義される。 η は内挿関数のべき乗数である。また、マイクロ第 1PK 応力 \mathbf{P}_m は、マイクロポテンシャル関数 Ψ_m をマイクロ変形勾配 \mathbf{F}_m で偏微分することで得られる。

$$\mathbf{P}_m = \frac{\partial \Psi_m}{\partial \mathbf{F}_m} = (1 - s_i^\eta) \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{F}_m} + s_i^\eta \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{F}_m} = (1 - s_i^\eta)\mathbf{P}_1 + s_i^\eta\mathbf{P}_2 \quad (30)$$

ここで、 \mathbf{P}_1 、 \mathbf{P}_2 は、それぞれ phase-1 と phase-2 のマイクロ第 1PK 応力を意味しており、マイクロ変形勾配 \mathbf{F}_m が決まっていれば一意に求まるものである。なお、本項および次項でも便宜的に第 1PK 応力を用いているが、第 2PK 応力を用いて表現しても構わない。

3.2 マクロ設計変数とマクロポテンシャル関数の正則化 本研究では、マイクロ構造が 2 種類の異なる材料で構成されるのに対し、マクロ構造はそれと等価な単一均質材料からなる。したがって、SIMP 法をそのまま適用することができ、マクロ設計変数をマクロ構造の各有限要素 I の材料体積比、すなわち密度 ρ_I と定義すると、有効マクロポテンシャル関数 $\bar{\Psi}_M$ は次式で与えられる。

$$\bar{\Psi}_M = \rho_I^\eta \Psi_M \quad (31)$$

ここで、 Ψ_M は同定されたパラメータを用いた異方性超弾性構成則のポテンシャル関数式 (15) である。また、有効マクロ第 1PK 応力 $\bar{\mathbf{P}}_M$ はこれをマクロ変形勾配 \mathbf{F}_M で偏微分することで得られる。

$$\bar{\mathbf{P}}_M = \frac{\partial \bar{\Psi}_M}{\partial \mathbf{F}_M} = \rho_I^\eta \frac{\partial \Psi_M}{\partial \mathbf{F}_M} = \rho_I^\eta \mathbf{P}_M \quad (32)$$

ここで、式 (32) は式 (A.8) と式 (30) の関係から以下のように書き換えることができる。

$$\bar{\mathbf{P}}_M = \frac{\rho_I^\eta}{|Y|} \int_{y_0} (1 - s_i^\eta)\mathbf{P}_1 + s_i^\eta\mathbf{P}_2 dY \quad (33)$$

また、(31) も同様に以下のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_M &= \frac{\rho_I^\eta}{|Y|} \int_{y_0} \Psi_m dY \\ &= \frac{\rho_I^\eta}{|Y|} \int_{y_0} (1 - s_i^\eta)\Psi_1 + s_i^\eta\Psi_2 dY \end{aligned} \quad (34)$$

このように、有効マクロ第 1PK 応力 $\bar{\mathbf{P}}_M$ および有効マクロポテンシャル $\bar{\Psi}_M$ は、マイクロ設計変数とマクロ設計変数の両方に依存する形で書き表すことができるため、2 つの異なるスケールの影響が考慮されていることが確認できる。

3.3 最適化問題の定式化

最適化問題は、一般に設計変数に依存する目的関数、等式・不等式制約条件で定義される。本研究では、材料体積量一定の制約の下、マクロ構造のエンドコンプ

ライアンスを最小化する（最終荷重ステップ時における剛性の最大化）という等式制約条件付きの最適化問題を設定した。そこで目的関数を制御する変数は、マクロの変位場 \mathbf{U} およびマクロ設計変数 ρ 、マイクロ設計変数 s であるから、目的関数は $f(\mathbf{U}, s, \rho)$ のように記述できる。制約条件については、マクロ構造内にある材料体積量を一定とする等式制約条件を $h_1(\rho) = 0$ とし、さらにユニットセル内にある phase-2 の体積はユニットセル全体で最適化計算中でも変化しないという等式制約条件を $h_2(s) = 0$ とした。このような条件のもと、本研究で設定した最適化問題を以下に記す。

$$\min f(\mathbf{U}, s, \rho) = \int_{\partial B_0} \hat{\mathbf{T}}_M \cdot \mathbf{U} d\Gamma \quad (35)$$

subject to :

$$h_1(\rho) = \int_{B_0} \rho_I d\Omega - \hat{V}_M = 0 \quad (36)$$

$$h_2(s) = \int_{y_0} s_i dY - \hat{V}_m = 0 \quad (37)$$

$$0 \leq \rho_I \leq 1 \quad I = 1, \dots, n_\rho \quad (38)$$

$$0 \leq s_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n_s \quad (39)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{T}}_M$ はマクロ境界で定義されら所与のマクロ表面力ベクトルである。また、 \hat{V}_M はマクロ構造内における所与の材料体積を意味し、 n_ρ はマクロ構造の要素数を示す。同様に \hat{V}_m はユニットセル内における所与の phase-2 材料の総体積であり、 n_s はユニットセルを構成する有限要素数を示す。

ちなみに、ここでは等式制約条件ではなく不等式制約条件（例えば $g_1(\rho) = \int_{B_0} \rho_I d\Omega - \hat{V}_M \leq 0$ ）を課してもよい。ただし、本最適化問題は設計変数値の増加（あるいは材料剛性の増加）に伴って目的関数が単調増加する問題であるため、最適解 ρ^* が求まった際には材料総体積量はその最大値 \hat{V}_M と等しくなる。つまり、 $g_1(\rho^*) = 0$ を満たすこととなり、予め等式制約条件を課した場合とほとんど同じ結果が得られることがわかっている。そのため、本最適化問題では最適解への収束速度の早さと扱いやすさを考慮して等式制約条件を課している。

本研究では、上記の最適化問題をマイクロとマクロ設計変数によって次のように 2 つに分離し、それぞれを個別に解くものとした。

- 最適化問題 1 (マクロ構造の最適化問題)

$$\min f(\mathbf{U}, \rho) = \int_{\partial B_0} \hat{\mathbf{T}}_M \cdot \mathbf{U} d\Gamma \quad (40)$$

$$\text{subject to : } h_1(\rho) = \int_{B_0} \rho_I d\Omega - \hat{V}_M = 0 \quad (41)$$

$$0 \leq \rho_I \leq 1 \quad I = 1, \dots, n_\rho \quad (42)$$

- 最適化問題 2 (マイクロ構造の最適化問題)

$$\min f(\mathbf{U}, s) = \int_{\partial B_0} \hat{\mathbf{T}}_M \cdot \mathbf{U} d\Gamma \quad (43)$$

$$\text{subject to : } h_2(s) = \int_{y_0} s_i dY - \hat{V}_m = 0 \quad (44)$$

$$0 \leq s_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n_s \quad (45)$$

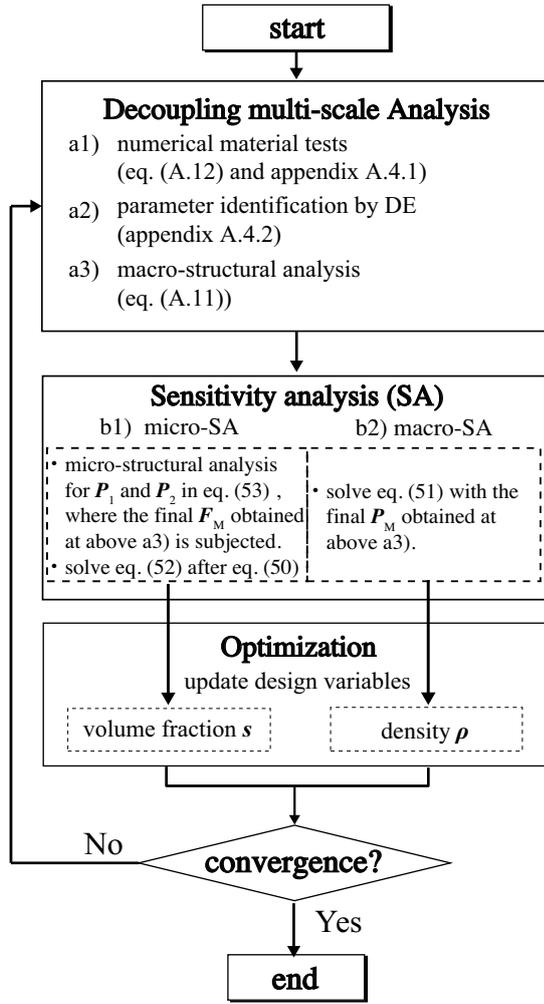


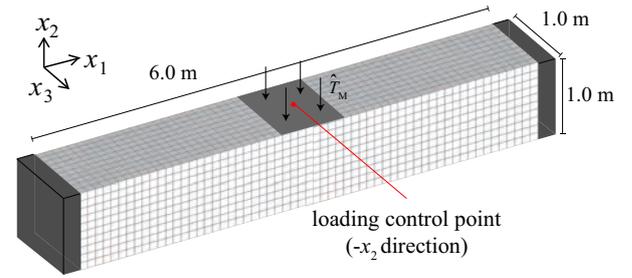
Fig. 1 Flow for the proposed optimization scheme

なお、本研究では数値解析上有効な最適化アルゴリズムとして、勾配基本法のひとつである最適性規準法⁽²⁵⁾ (optimality criteria method: 以下、OC法と略す) を適用する。上記のとおり、2つに問題を分離したためミクロおよびマクロ設計変数の更新にはOC法を2度適用することとなるが、各々の体積制約を満たしながら最適解を求めることができる。

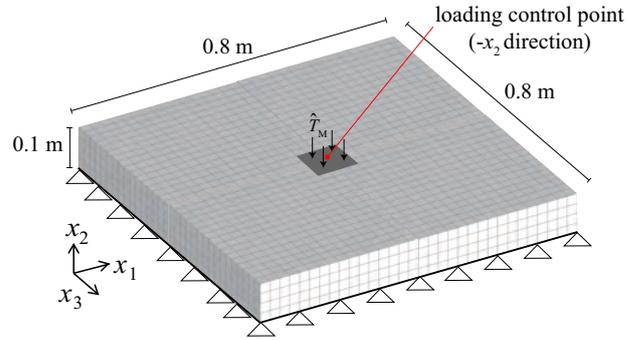
3.4 目的関数の感度の導出 本研究では勾配基本法を用いて最適解を探索するため、マクロ構造解析実施後に目的関数と等式制約条件の設計変数 s_i , ρ_l に関する勾配 (感度) をそれぞれ求める必要がある。等式制約条件式のそれぞれの設計変数に対する感度については自明であるため、以下では目的関数の感度導出法についてのみ記述する。

3.4.1 目的関数の感度

本研究では、マクロのつり合い式 (A.11) を用いて目的関数の感度を導出する。ここでは、感度の導出を効率よく行うために離散的随伴法を用いることとする。離散的随伴法とは、目的関数とつり合い条件式 (ここでは仮想仕事式) を離散化した上で随伴ベクトルと呼ばれる任意のベクトルを導入し、数学的な操作によ



(a) macrostructure 1: bending structure with both ends clamped



(b) macrostructure 2: plate structure

Fig. 2 Structural situation of macrostructures

て導出が困難とされる陰的な感度項を取り除き、陽的な感度項のみで目的関数の感度を導く方法である。これにより、感度の計算に要する計算コストを大幅に低減できるようになる。いま、随伴ベクトルを λ として次式のように目的関数を書き換えるが、括弧の中が零であることからこの書き換えによって数学的な問題は生じない。

$$f' = f - \lambda^T \mathbf{R}_M \quad (46)$$

$$= \mathbf{F}_{\text{ext}}^T \mathbf{U} - \lambda^T \left(\underbrace{\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}}_{\mathbf{R}_M=0} \right) \quad (47)$$

ここで、 $\mathbf{R}_M(\mathbf{U}, \mathbf{s}, \rho)$ は残差ベクトルである。また、 \mathbf{F}_{int} と \mathbf{F}_{ext} は、マクロ構造解析の最終荷重ステップ時のつり合い点における内力ベクトルと外力ベクトルを意味し、以下のように書くことができる。

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}_0^T \bar{\mathbf{P}}_M d\Omega, \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{T}}_M d\Gamma \quad (48)$$

ここで、 \mathbf{N} は形状関数、 \mathbf{B}_0 は初期配置を参照する B マトリックスである⁽³⁰⁾。なお、簡単のため、外力ベクトル \mathbf{F}_{ext} には物体力による影響はないものとし、またマクロ変形および設計変数 s_i , ρ_l に依存しないと仮定した上で、目的関数の設計変数に対する感度を随伴法によって導出する。まず、式 (47) をマクロ設計変数 ρ_l で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho_l} &= \frac{\partial f'}{\partial \rho_l} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^T \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_l} - \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_l} + \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \rho_l} \right) \\ &= \left(\mathbf{F}_{\text{ext}}^T - \lambda^T \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{U}} \right) \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_l} - \lambda^T \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \rho_l} \quad (49) \end{aligned}$$

Number of element: 1000
Number of node: 1331

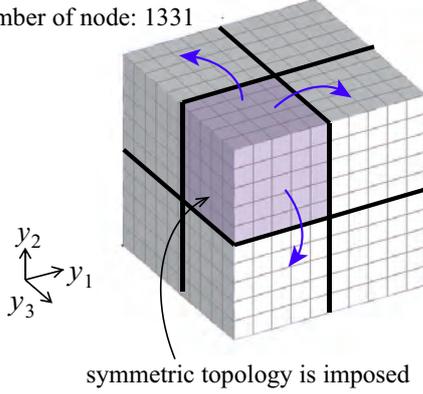


Fig. 3 Unit cell and a way imposing symmetric topology

となる。ここで、随伴ベクトル λ は任意のベクトルであるので、以下の方程式を満たす随伴ベクトル λ^* を求めて式 (49) に代入すれば、陰的な感度項 $dU/d\rho_l$ を消去できる。

$$\mathbf{K}_T^T \lambda^* = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (50)$$

ここで、 \mathbf{K}_T は最終荷重ステップ時のつり合い点における接線剛性行列を示す。

これにより、目的関数の設計変数 ρ_l に対する感度は陽的な感度項のみで構成された次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho_l} &= -\lambda^{*T} \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \rho_l} = -\lambda^{*T} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}_0^T \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}_M}{\partial \rho_l} d\Omega \\ &= -\lambda^{*T} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}_0^T (\eta \rho_l^{\eta-1} \mathbf{P}_M) d\Omega \end{aligned} \quad (51)$$

ここでは、式 (32) で示された有効マクロ第 1PK 応力 $\bar{\mathbf{P}}_M$ に対する ρ_l の微分を取っている。なお、上式において未知数はマクロ第 1PK 応力 \mathbf{P}_M であるが、これは最終荷重ステップ時のつり合い点において求めた \mathbf{P}_M を代入すればよい。よって、マクロの感度については、明らかに陽的に求まることがわかる。

一方、マイクロ設計変数 s_i に対する目的関数の感度もマクロ設計変数の場合と同様にして次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s_i} &= -\lambda^{*T} \frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial s_i} = -\lambda^{*T} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}_0^T \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}_M}{\partial s_i} d\Omega \\ &= -\lambda^{*T} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{B}_0^T \left(\rho_l^\eta \frac{\partial \mathbf{P}_M}{\partial s_i} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (52)$$

著者らの先行研究⁽²¹⁾で示したとおり、ここで問題となるのが、 $\partial \mathbf{P}_M / \partial s_i$ の算出方法である。つまり、 \mathbf{P}_M はマクロ領域で、 s_i はマイクロ領域でそれぞれ定義された変数であることから、それらの間に直接的な関係性がなく $\partial \mathbf{P}_M / \partial s_i$ を陽に求めることはできない。そこで、本研究ではまず、式 (A.8) と式 (30) の関係を念頭に、感度 $\partial \mathbf{P}_M / \partial s_i$ を均質化法によって以下のように定式化した。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}_M}{\partial s_i} &= \frac{1}{|Y|} \int_{y_0} \frac{\partial \mathbf{P}_m}{\partial s_i} dY \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{y_0} \eta s_i^{\eta-1} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{F}_m} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{F}_m} \right) dY \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{y_0} \eta s_i^{\eta-1} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) dY \end{aligned} \quad (53)$$

よって、上式の第 3 行にあるマイクロ第 1PK 応力 \mathbf{P}_1 、 \mathbf{P}_2 さえ求めれば、 $\partial \mathbf{P}_M / \partial s_i$ が得られることになる。しかし、このマイクロ第 1PK 応力 \mathbf{P}_1 と \mathbf{P}_2 は式 (30) の均質化解析で用いた \mathbf{P}_1 、 \mathbf{P}_2 とは別のもので、この感度の導出のために新たに計算される状態変数であることに注意が必要である。本研究では所与のマクロひずみを与えてユニットセル内のマイクロひずみと応力とを計算する、“局所化解析”によってこのマイクロ第 1PK 応力 \mathbf{P}_1 と \mathbf{P}_2 を求めることとした。

以上をまとめると、この局所化解析を利用した感度解析は、マクロ構造解析の最終荷重ステップ時におけるつり合い点において、(i) マクロ要素の応力積分点におけるマクロ変形勾配 \mathbf{F}_M を所与の変形、すなわち境界条件としてユニットセルに負荷してマイクロ境界値問題 (局所化解析) を解き、(ii) 各マイクロ要素の応力積分点におけるマイクロ第 1PK 応力 \mathbf{P}_1 、 \mathbf{P}_2 をそれぞれ求め、(iii) それらを式 (53) に代入して、 $\partial \mathbf{P}_M / \partial s_i$ を求めるという手順となる。

よって、最終の感度である式 (52) を求めるためには、この局所化解析を応用した感度解析をマクロ構造の全積分点で行う必要があるため、マクロの応力積分点の数が増加するにつれてその計算コストは大きくなる。しかし、一般のマイクロ-マクロ連成型のマルチスケール解析を適用する場合に比べて大幅に計算コストを抑えることができる点を強調しておく。

最後に参考として、本論文で提案するマルチスケールトポロジー最適化手法の全体フローを Fig.1 に記す。

4. 最適化計算例

4.1 計算条件 本節では、具体的な最適化計算を実施して本論文で提案するマルチスケールトポロジー最適化手法の妥当性を検証する。ここでは、最適化計算例に使用するマクロ構造として Fig.2 に示す 2 つのモデルを用意した。マクロ構造 1 では、両端固定の梁構造、マクロ構造 2 では板状の構造である。どちらの場合もマクロ材料体積比は 20% とし、マクロ設計変数の初期値は全ての要素で $\rho_l = 0.2$ とした。また、前述のとおり、マクロ構造には Kaliske の材料モデルを用い、その材料パラメータは数値材料試験を実施したあとに最適化アルゴリズムを用いてその数値を同定する。本計算例では、最適化アルゴリズムの中でも計算速度や計算精度の面で高い性能を有するとされる差分進化法⁽³¹⁾ (Differential Evolution; 以下、DE と略す) を用いて同定を行った。DE による具体的な同定方法については付

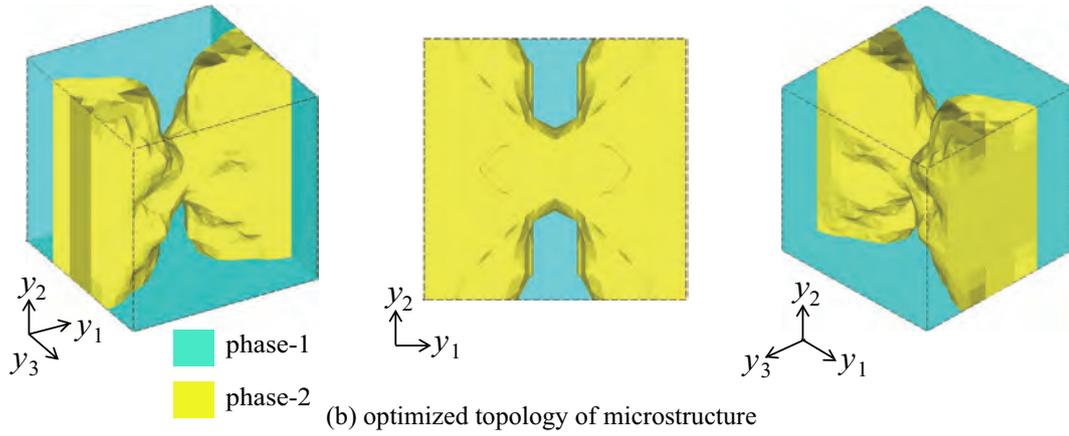
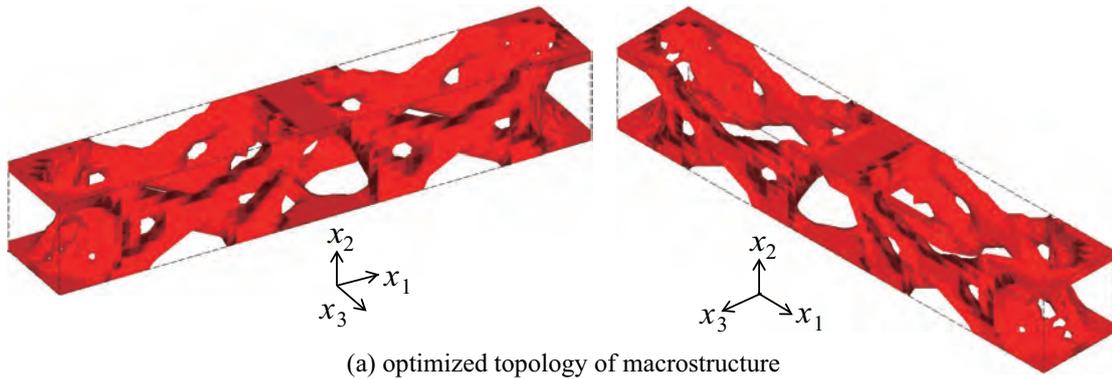


Fig. 4 Optimization results for macrostructure 1 (bending structure with both ends clamped) under a low load level

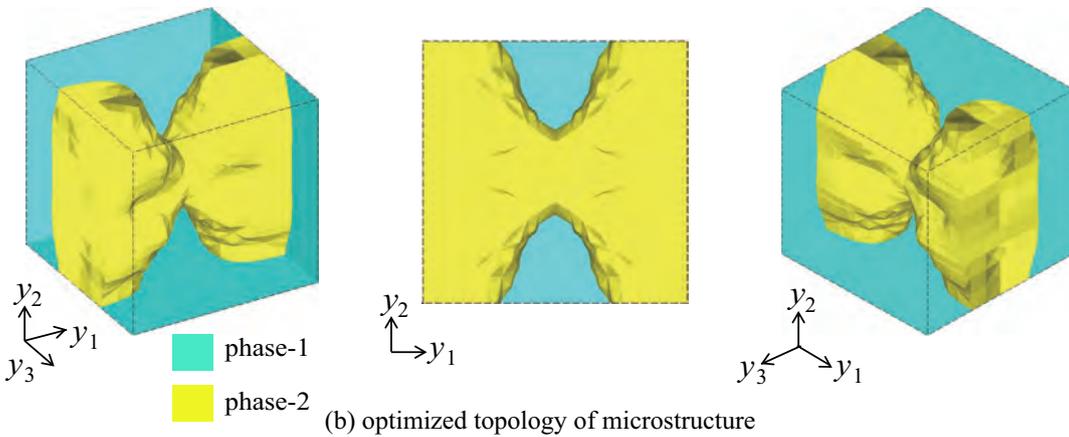
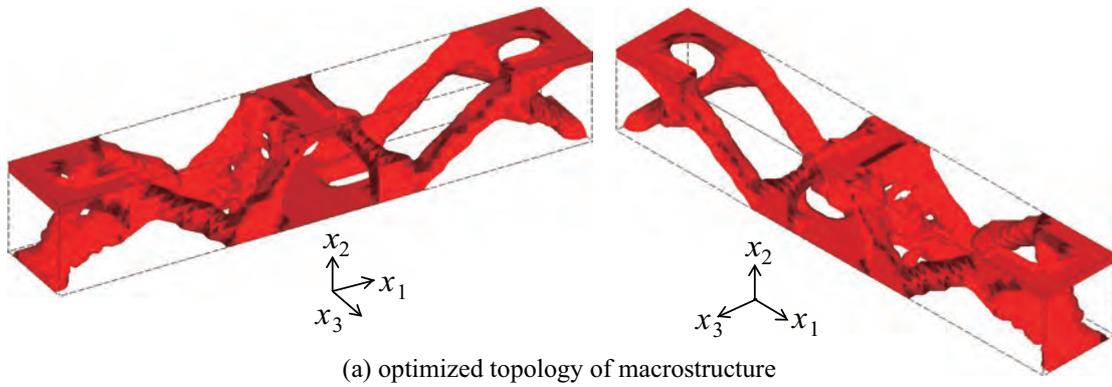


Fig. 5 Optimization results for macrostructure 1 (bending structure with both ends clamped) under a high load level

Table 1 ミクロ材料定数

	C_1	C_2	D
phase-1	1.923×10^2	0	1.6×10^{-3}
phase-2	1.923×10^3	0	1.6×10^{-4}

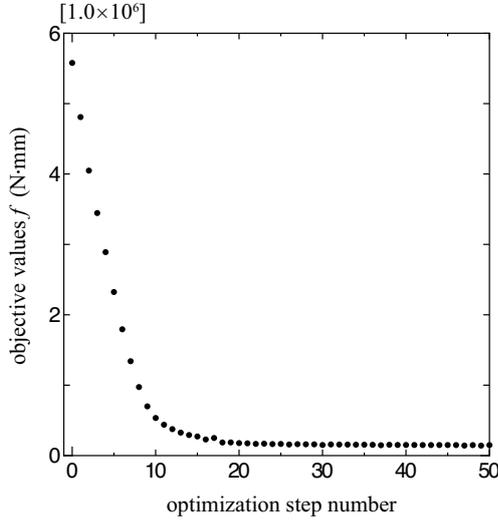


Fig. 6 Optimization history of macrostructure 1 (bending structure with both ends clamped) under a high load level

録Aの4.2節で簡単に述べているが、DEの詳細については文献⁽³¹⁾を参照されたい。

一方、使用するユニットセルは全ての計算例において、Fig.3に示す8節点六面体要素を用いた立方体形状とし、これが2つの材料(phase-1, phase2)で構成されると仮定している。本計算例では、Fig.3に示すように構造解析についてはユニットセル全体を用いているが最適化のための設計領域はユニットセルの1/8領域とし、これを他の領域に対称的に割り当てることでユニットセル全領域のトポロジーを得るようにした。このような処置をした理由は、Fig.2(a)で示したマクロ構造ではx3軸に対して、(b)のマクロ構造ではx1軸とx3軸に対してミラー対称となっているが、ミクロ構造の最適化問題が非一意性の問題であることを念頭におくと、Fig.3のような設計上の拘束をミクロ構造に課さない限り、マクロ構造のミラー対称性をおかさないミクロ構造トポロジーを安定して得ることは難しいためである。

ミクロ材料モデルは、Mooney-Rivlin則による等方性超弾性構成則でTable1に示した材料定数を用いて、phase-2がphase-1より硬い材料となるよう設定した。なお、べき乗数はいずれの場合も $\eta=3$ とした。また、phase-2の材料体積比はマクロ構造1では25%、マクロ構造2では30%とし、設計変数の初期値は上記の材料体積比を一様に与え、中心部の要素のみ周囲よりも0.01大きな値を与えた。これは、全ての要素に同じ初期値を与

えた条件下で一様変形を課すと、どの要素でも同じ応力およびひずみ分布となるため、それぞれの設計変数に対する感度 $(\partial f/\partial s_i)$ の値も全て同じとなる。これは数値的に特異な状態を意味しており、それ以降最適化を実行できなくなるため、それを回避するために行う数値的な処置である。また、本計算例では最適化計算後のトポロジーがいわゆるチェッカーボード材料配置へ停留することを避けるためにメッシュ非依存型フィルタリング法^(32,33)を採用した。フィルタ半径については、いずれもユニットセル内の要素長の3倍を基本とし、最適化ステップが増すごとに徐々に小さくするように設定した。

なお、いずれの計算例においても結果を理解しやすいようにマクロの座標軸 x_1, x_2, x_3 とミクロの座標軸 y_1, y_2, y_3 の方向がそれぞれ一致するように設定した。

ところで、本最適化計算例では有限変形を前提とするため、超弾性体という経路非依存性の材料モデルを用いても境界条件として与える荷重の大きさが違えば最適なトポロジーは異なるはずである。そのため、それを確認するためにいずれのマクロ構造に対しても大きさの異なる荷重を2ケース用意し、それぞれに対する最適化トポロジーを比較検証することとした。

なお、本計算の非線形マクロ構造解析は、荷重増分法を用いて実施した。ここでは、あとで示す荷重-変位曲線を理解しやすくするために、荷重係数を用いて解くべきマクロ構造の仮想仕事式(A.11)を次のように書き変えた。

$$\int_{\partial\Omega_0} \delta \mathbf{F}_M : \mathbf{P}_M d\Omega - \gamma \int_{\partial\Omega_0} \delta U \cdot \hat{\mathbf{T}}_M^0 d\Gamma = 0 \quad (54)$$

ここで、 γ は所与の荷重係数、 $\hat{\mathbf{T}}_M^0 = 1.0$ (N/mm²)としたマクロの基本表面力ベクトルを意味する。また、簡単のため、ここでは物体力はないものと仮定した。

4.2 両端固定梁構造(マクロ構造1)を用いた計算例

ここでは、等分布荷重としてマクロの表面力ベクトルが $\hat{\mathbf{T}}_M = 1.0 \times 10^{-6}$ (N/mm²)という非常に小さな荷重と $\hat{\mathbf{T}}_M = 0.1$ (N/mm²)という大きな荷重を与えた場合の2種類の最適化計算を行った。よって、荷重係数は式(54)に従って、 $\gamma = 1.0 \times 10^{-6}$ と $\gamma = 0.1$ である。Fig.4およびFig.5は、それぞれ荷重レベルが低い場合と高い場合の最適化結果を示している。

まず、最適化されたマクロ構造のトポロジーに着目すると、Fig.4では荷重レベルが小さいため微小変形を仮定したときに得られるトラス構造のような材料配置となっていることが分かる。一方、Fig.5では梁中央付近と端部を結ぶ中間部分に明確な斜材を有するトポロジーが得られた。つまり、外荷重が大きくなるに従ってマクロ構造の幾何学的非線形性が増し、結果的にトラスのような変位を小さくするようなトポロジーではなく、吊構造のように変位を許容しながらも変形後の剛性を最大にする(エンドコンプライアンスを最小にする)トポロジーに移行していることを意味している。

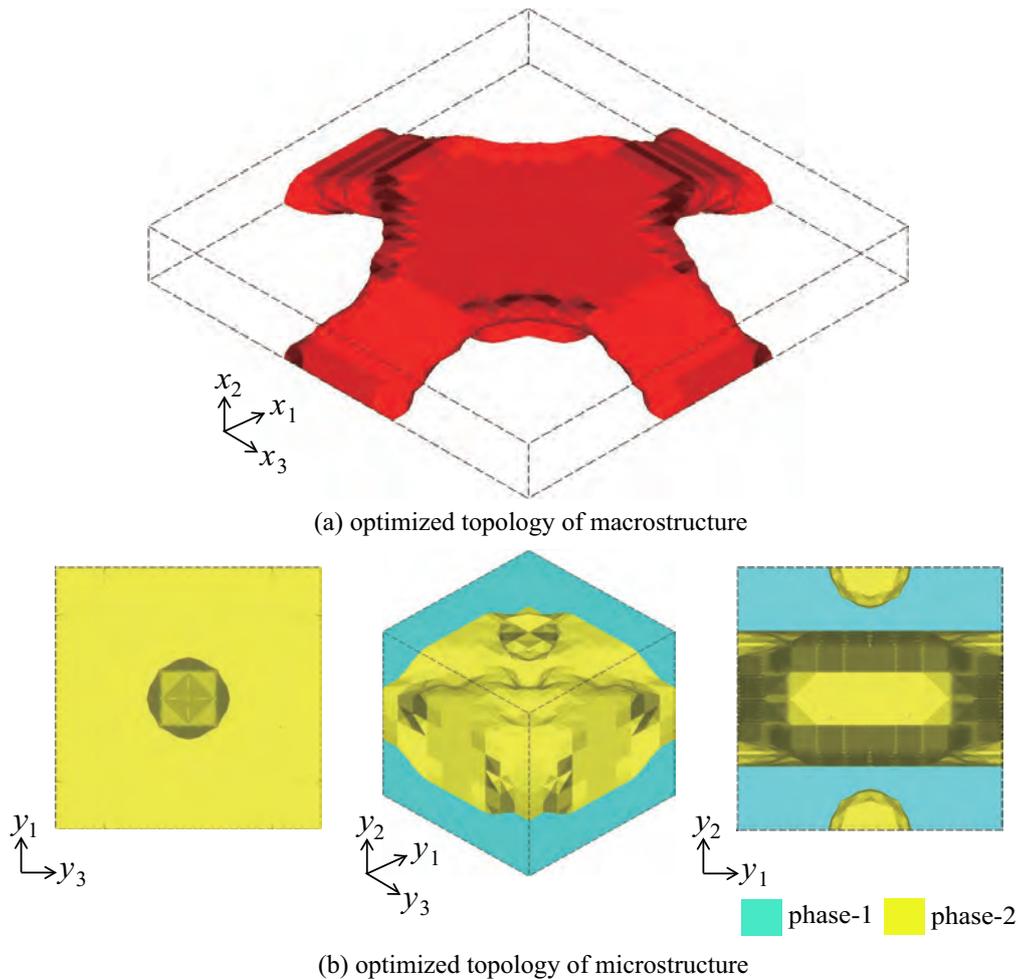


Fig. 7 Optimization results for macrostructure 2 (plate structure) under a low load level

この結果については、Buhl et al.⁽³⁴⁾ や松井ら⁽³⁵⁾ の2次元の有限変形を考慮したトポロジー最適化結果と同じ傾向を示しており、力学的な観点から見ても正しい結果であるといえる。

次に、Fig.4で得られた最適マイクロ構造について言えば、マクロ構造挙動としては梁長手軸方向(x_1 軸方向)の引張・圧縮変形と x_1x_2 面せん断変形に対する抵抗が優先的に必要で、梁奥行き方向(x_3 軸方向)にはそれほど抵抗を要しないことを念頭に入れて最適マイクロ構造を考察してみる。

そうすると確かに固い材料である phase-2 (黄色) はもっぱら y_1 軸方向変形と y_1y_2 面せん断変形の両方に抵抗できるトポロジーとなっていることがわかる。また、それほど抵抗を要しない y_3 軸方向に対しては固い材料の phase-2 (黄色) 自体は不連続となり、代わりに軟らかい材料の phase-1 (青色) がその中間層を母材として補うようなトポロジーとなっている。このような観点から言えば、得られたマイクロ構造はマクロ構造挙動を反映した合理的なトポロジーになっていると考えられる。

しかし、このような大まかな評価・解釈は可能であ

るが、得られたマイクロ構造トポロジーの力学的な意味合いを厳密に求めることは困難である。これは、マイクロ構造が「複合材料」であることに加えて、「幾何学的非線形性」を前提としていること、さらに前述のとおり周期境界に起因する「解の非一意性」を呈するなど、これらが複合的に関与し合う複雑な問題となるためである。

ここでは、その要因の一つである「複合材料」だけに着目して、評価を難しくするメカニズムについて説明を加えることとする。まず、簡単のため線形弾性体の剛性最大化を目的としたトポロジー最適化を例に上げると、多孔質材料のトポロジー最適化では(条件によって幾分の差は生じるものの) 固体材料の所与の材料パラメータ(ヤング率)の大きさに依存せず概ね同様の最適化トポロジーが得られることが知られている。しかし、複合材料の場合は線形弾性体であっても得られるトポロジーは各種構成材料の材料パラメータのバランスに依存し、これが結果的に得られるトポロジーを複雑化させるとともに、そのトポロジーの合理性や力学的な意味合いを理解しづらくしている。これは、多孔質材料の場合、材料のない空隙部分は応力を伝達し

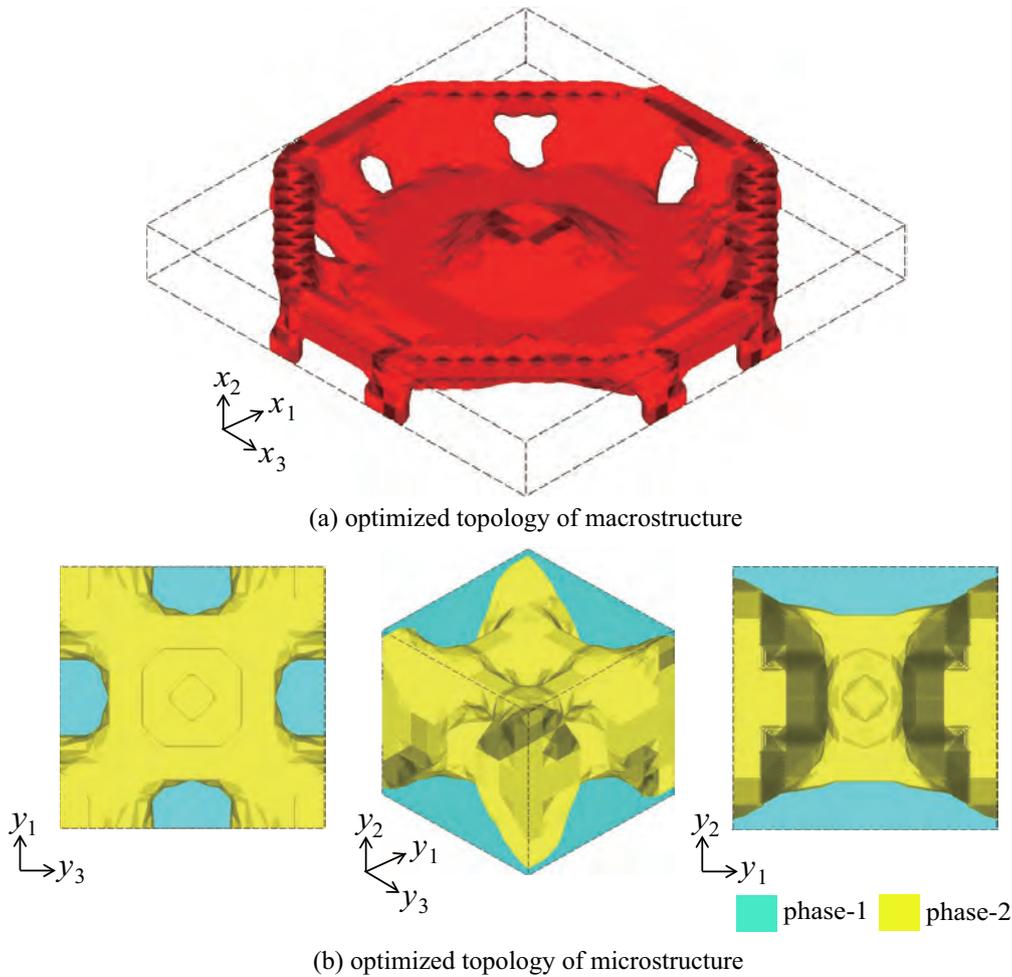


Fig. 8 Optimization results for macrostructure 2 (plate structure) under a high load level

ないが、複合材料の場合は弱相（本計算例では phase-1）であっても所与の材料パラメータの大きさに応じて応力を伝達するため、もはや経験的あるいは直感的な理解が及ばなくなるほど複雑な構造システムとなるためである (36, 37, 38)。

このように、複合材料の場合は微小変形レベルであっても得られたマイクロ構造トポロジーの評価は困難である点を指摘したが、Fig.5では大きな荷重を受けた場合の結果であり、さらにその評価は困難となる。Fig.5とFig.4のマイクロ構造トポロジーを比較すると基本的には同様のトポロジーであるが、 y_1y_2 正面図に見られるように若干の違いは見られた。これは、変形量が大きくなったとしてもマクロ構造で卓越する主応力方向にあまり差がみられなかったためであると考えられる。そのため、主応力方向のバランスを大きく崩すためにさらに大きな載荷荷重を負荷して最適化計算を試みたが、マクロ要素の一部でマクロ変形勾配のヤコビアン $J_M > 0$ が成立しないほどの過大な変形が生じたため、それ以上の計算を進めることができなくなった。これは、当該材料モデルで許容できる限界を超えたということではあるが、基本的には密度の低いマクロ要素においては極端に抵抗が小さいため、大きな変形が生じ

やすくなっていることが原因である。この問題は、有限変形を考慮したトポロジー最適化でよく見られるものであり、現在では幾つかの対処方法 (39, 40) が提案されている。しかし、本論文ではこれらの対処法を導入することによって本最適化問題本来の定式化が見た目に複雑化してしまうことを懸念し、そのプログラムの実装を行っていない。この点については、今後の課題としたい。

4.3 板構造（マクロ構造 2）を用いた計算例 次に、Fig.2の板構造（マクロ構造 2）を用いた場合の最適化計算例を紹介する。前節と同様にここでも大きさの異なる 2 種類の等分布荷重を負荷するが、荷重レベルが低いものについては表面力ベクトルを $\hat{T}_M = 0.1$ (N/mm²) とし、高いものについては前節で残した課題を議論するために極力大きな荷重を与えることを試みて $\hat{T}_M = 2.5$ (N/mm²) とした。これより、荷重係数はそれぞれ $\gamma = 0.1$ および $\gamma = 2.5$ である。このような厳しい荷重条件のもと、得られるマイクロおよびマクロ構造トポロジーを比較検証した。

なお、ここでは最適化結果の力学的な意味合いを理解しやすくするために、Kemmler and Ramm⁽⁴¹⁾ が行った矩形薄板のトポロジー最適化結果と比べながら考察す

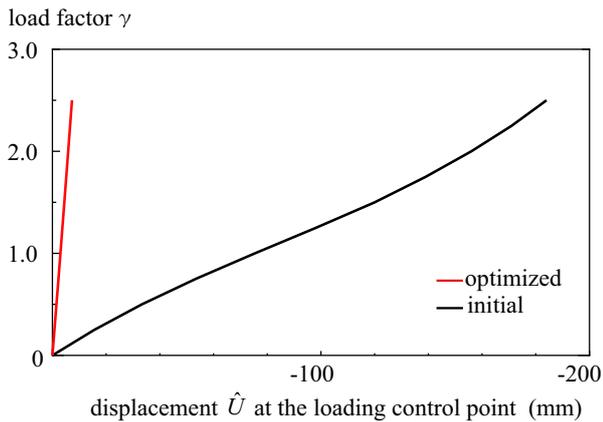


Fig. 9 Load–displacement curves for macrostructure 2 (plate structure) under a high load level

る。ただし、文献⁽⁴¹⁾は、本研究と同様に有限変形を前提としてそのエンドコンプライアンス最小化問題を取り扱っているが、キルヒホッフの板理論に準じたマクロ構造 (1スケールのみ) を対象としていること、また、等方性の材料モデル (SIMP モデル) を採用している点は当該構造問題と異なる。

まず、Fig.7およびFig.8は、それぞれ荷重レベルが低い場合と高い場合において得られた最適化結果を示している。Fig.7に示されるマクロ構造トポロジーの平面形状は、短軸方向、つまり x_1 , x_3 方向を主軸とした十字形のトポロジーが得られていることが分かる。この十字形のトポロジーについては、文献⁽⁴¹⁾が行った微小変形時において得られたトポロジー最適化結果とほぼ同じ傾向を示している。また、Fig.7を断面方向から見た場合にはトラス・アーチ構造のような変形を小さく抑える典型的な材料配置となっていることがわかる。つまり、変位が十分に小さい範囲ではエンドコンプライアンス最小化は極力変形を小さく抑える構造、すなわち線形弾性体における剛性最大化問題と同様の問題となり、本手法ではそれが正しく表現できているといえる。一方、Fig.8の場合は、それを上下に裏返したような構造をしており、上面に形成される輪状の部分によって荷重に抵抗する吊構造となっていることがわかる。この結果についても、文献⁽⁴¹⁾の有限変形を考慮した薄板のエンドコンプライアンス最小化の結果と同様の傾向を示している。このような観点から言えば、マクロ構造のトポロジー最適化結果については荷重の大きさに適合する合理的なエンドコンプライアンス最小化構造が得られていると言える。

次に、Fig.7およびFig.8で得られた最適マイクロ構造に着目すると、両者ともにマクロ構造で卓越する x_1x_3 平面応力に抵抗するように、それと平行な y_1y_3 平面応力に対する補強を優先するトポロジーになっていることが分かる。また、荷重レベルが大きく違えば、最適化マイクロ構造のトポロジーも異なるものになるという点

が確認された。これは、前計算例では考察できなかった部分である。なお、ここで参考として、Fig.9に荷重レベルが高い場合の最適化前後の荷重-変位曲線を示す。最適化前では、200 mm 程度の非常に大きな変位が生じていたが、最適化によりエンドコンプライアンスがかなり小さくなっていることがわかる。

ところで、文献⁽⁴¹⁾のエンドコンプライアンス最小化の計算例では、荷重が増加するに従って最適構造である十字形のトポロジーの主軸が x_1x_3 方向から、対角線方向へと変化することが示されている。エンドコンプライアンス最小化はそもそも構造の最終変形状態の剛性を高くすることを目的とするため、変形前の初期剛性や変形途中の剛性は関係しない。よって、矩形薄板を対象としたトポロジー最適化で幾何学的非線形性が顕著になるような大きな荷重を負荷した場合、主軸の方向がスパンの長い (変位が出やすい) 対角線方向に変化するという結果は力学的に見て正しいと言える。

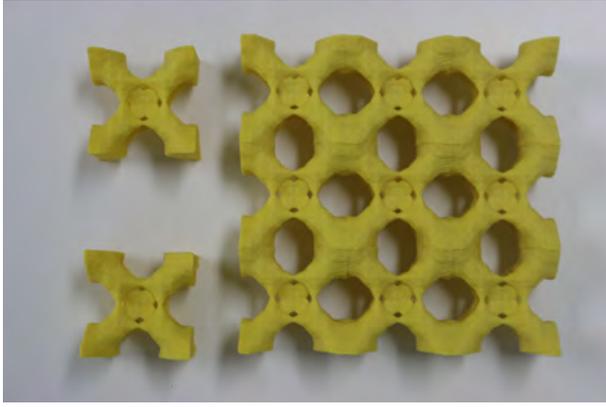
そこで、改めて当該計算結果のマイクロ構造について詳しく考察してみると、Fig.7では y_1y_3 平面方向に等方的なトポロジーであったのに対し、Fig.8では、 y_1y_3 平面では対角線方向を主方向とする直交異方性のマイクロ構造になっていることが確認された。つまり、文献⁽⁴¹⁾では、等方性の材料モデルを用いたマクロ構造単独のトポロジー最適化であるため、幾何学的非線形性が増した場合への対応としてはマクロ構造の主軸が対角線方向に変化した。マイクロとマクロ構造の両方を最適化した本計算例では、マイクロ構造が対角線方向を主軸とする直交異方性を示したと同時に、マクロ構造もその材料特性を考慮したトポロジーになっていることが確認できた。これは、マイクロ-マクロ双方が一体となって最適な構造を作り出したことを裏付けるものといえる。

なお、Fig.10は、最適化結果のFig.8だけでは3次元的な材料配置を確認しづらいため、ユニットセルを $3 \times 3 \times 1$ 個連結したマイクロ構造を作成し、その形状を3Dプリンターで打ち出したものである。ここでは、見やすくするため phase-1 (青色) の部分を取り去り、phase-2 (黄色) の部分だけを製作した。これにより、確かに y_1y_3 平面上にはマイクロ構造の主軸が対角線方向に配向していることがわかる。

以上より、本研究で提案したマルチスケールトポロジー最適化手法は、与える荷重の大きさに適合して、マイクロとマクロ双方で最適な構造を算出できる信頼性の高い手法であることが確認できた。

5. 結論

非線形構造問題を扱ったマルチスケールトポロジー最適化の研究は、計算コストが膨大となる上、理論も難解となることからこれまでほとんど扱われてこなかった。そこで、本研究では計算コストを低く抑えつつ、様々な非線形構造問題に対しても適用可能な汎用性の高いマルチスケールトポロジー最適化手法の開発を目



(a) View from y_1y_3 -plane of optimized unit cells and the microstructure



(b) Zoom of optimized microstructure

Fig. 10 3D printer outputs of optimized unit cells and the microstructure for macrostructure 2 under a high load level: the diagonal direction of the microstructure corresponds with that of the macrostructure

指してきた。ここでは、分離型マルチスケール解析法という計算コストを低く抑える新しいマルチスケール解析法を導入し、超弾性体複合材料を仮定して、ミクロとマクロ構造両方のトポロジーを同時に最適化できる手法を開発した。また、最後に具体的な最適計算例においてその性能を検証した。以下に本研究で得られた知見と今後の課題を記す。

- 最適化計算例で示された結果から、力学的に合理的なミクロおよびマクロ構造のトポロジーが得られており、本手法の妥当性と性能の高さが確認された。特に大きな荷重が負荷されてマクロ構造の幾何学的非線形性が増すにつれてミクロ構造のトポロジーもそれに適合して大きく変化することが示された。
- 実際の最適化計算において要素の変形量が大きくなりすぎると、要素のヤコビ行列式が破綻して計算が止まってしまうという問題が生じた。これは有限変形を考慮したトポロジー最適化共通の課題であり、すでにいくつかの対処法^(39,40)が提案されている。しかし、これらはいずれも特殊な手法で汎用性も乏しいことから本計算例では導入していない。よって、今後の課題として、変形量の大きな問題に対しても安定的かつ汎用性に優れた手法の開発が期待される。
- 本研究では超弾性体を仮定した場合のトポロジー最適化を扱ったが、本手法のしくみから言えば弾塑性材料などの材料非線形モデルにおいても同様の枠組みが適用可能であり、この点において汎用性の高い手法と考えられる。ただし、その場合には数値材料試験から得られる応答を精度よく近似できる（異方性の）マクロ材料構成則が存在するということが前提となる。これは、ここで提案した最適化手法の問題ではなく分離型マルチスケール解析法固有の問題であることを

強調しておく。

付録A: 有限変形理論における分離型マルチスケール解析

1. 手法の概要

分離型マルチスケール解析手法は、ミクロ-マクロ2変数境界値問題を同時に連成して解く一般的な手法と異なり、ミクロおよびマクロ個々の境界値問題に分離して解く手法である。本手法の手順は、初めにミクロ境界値問題において、均質化法によって周期的なミクロ構造（以下、ユニットセル）を取り出し、それを数値的な供試体とみなして材料実験を模擬する。そして、ここで得られたミクロ解析結果を均質化法に基づき、マクロな材料変数に変換することで、マクロ材料応答を計測したものと考える。このようにコンピュータ上で仮想的な材料実験を行い、マクロ材料応答を得る一連の操作は「数値材料試験」と称される。

次に、数値材料試験により得られたマクロ材料応答を計測データとして利用し、マクロ材料構成則の材料パラメータの同定を最適化アルゴリズムを用いて行う。すなわち、数値材料試験により得られたマクロ材料応答と同等の挙動を示すマクロ構成則の材料パラメータを決定する。ちなみに、ここでいう最適化アルゴリズムは、構造最適化で設計変数を更新するために用いる最適化アルゴリズムとは別であることに注意されたい。

最後に、同定されたマクロ材料パラメータを用いてマクロ境界値問題を個別に解く。また、必要に応じて、マクロ構造内部の任意の物質点におけるひずみ履歴データを再びユニットセルに入力することで、そのポイントにおけるミクロレベルでの材料応答を観察することも可能である。この操作は一般に局所化解析と呼ばれる。以下では、ミクロ-マクロ2変数境界値問題の定式化およびミクロ境界値問題を解くために導入され

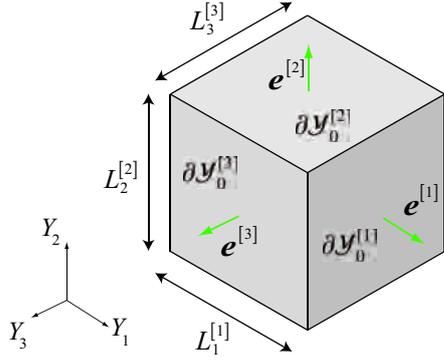


Fig. 11 Definition of unit cell and its basis axes

た外部節点の概念, さらにマクロ材料パラメータの同定方法について説明する.

2. ミクロ-マクロ2変数境界値問題

ここでは, 固体の有限変形理論の枠組みで均質化法により導かれるミクロ-マクロ2変数境界値問題を示す.

まず, 材料の非均質性を特徴づけるユニットセルについて, その物理領域の初期配置 \mathcal{Y}_0 に対して設定した初期座標 \mathbf{Y} と現配置 \mathcal{Y} における空間位置 $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{Y})$ からミクロ変形勾配 \mathbf{F}_m が次式で定義される.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m &= \nabla_Y \varphi(\mathbf{Y}) = \nabla_Y \mathbf{w} + \mathbf{1} \\ &= \tilde{\mathbf{H}} + \nabla_Y \mathbf{u}^* + \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここで, $\mathbf{1}$ は2階の恒等テンソル, $\tilde{\mathbf{H}}$ は後述する (\mathbf{Y} に独立な) マクロ変位勾配テンソル, \mathbf{u}^* はミクロスケールの周期的な擾乱変位場であり, ユニットセルの変位場 \mathbf{w} は \mathbf{c} を定数ベクトルとして次式で与えられる.

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{u}^* + \mathbf{c} \quad (\text{A.2})$$

このとき, ミクロスケールのユニットセル \mathcal{Y}_0 についての平衡方程式は,

$$\nabla_Y \cdot \mathbf{P}_m = \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

で与えられ, ミクロ第1Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{P}_m (以下, ミクロ第1PK 応力と呼ぶ) は式 (A.1) の変形勾配 \mathbf{F}_m を介して導入される任意の構成則により決定される.

また, 初期配置 \mathcal{Y}_0 のユニットセル境界上では擾乱変位場 \mathbf{u}^* に周期拘束が与えられる.

$$\mathbf{u}^*|_{\partial\mathcal{Y}_0^{[k]}} = \mathbf{u}^*|_{\partial\mathcal{Y}_0^{[-k]}}, \quad \text{for } k = 1, 2, 3 \quad \text{on } \partial\mathcal{Y}_0 \quad (\text{A.4})$$

ここで, Fig.11 に示すようにユニットセルが立方体でその境界面が座標軸と平行におかれているとすれば $\partial\mathcal{Y}_0^{[k]}$ は正規直交基底ベクトル $\mathbf{e}^{[k]}$ が法線ベクトルとなる境界面である. さらに, この拘束条件は, 式 (A.2) を用いることで変位場 \mathbf{w} に対する拘束条件に変換可能である.

$$\mathbf{w}^{[k]} - \mathbf{w}^{[-k]} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot (\mathbf{Y}^{[k]} - \mathbf{Y}^{[-k]}) = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{L}^{[k]} \quad (\text{A.5})$$

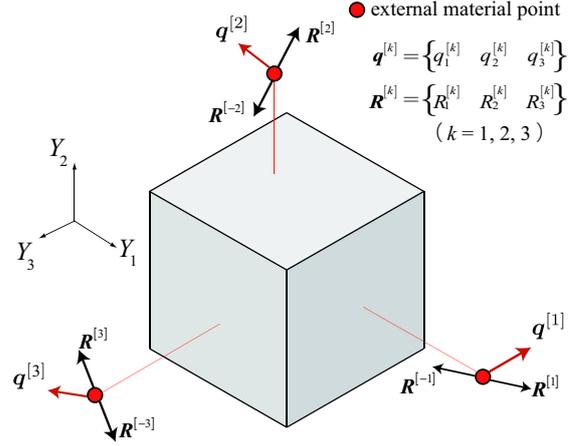


Fig. 12 Concept of external material points having degrees of freedom for relative displacement vector and the corresponding reaction force at an external material point in 3D

ここでは簡単のため, $(\cdot)^{[\pm k]} := (\cdot)|_{\partial\mathcal{Y}_0^{[\pm k]}}$ とおいた. $\mathbf{L}^{[k]}$ はユニットセルの k 方向の対となる境界線上の物質点を結合するためのベクトルであり, 辺ベクトルと呼ばれる.

また, この周期拘束条件により, 単位法線ベクトル \mathbf{N} を有する境界面上のミクロ表面力ベクトル $\mathbf{T}_m = \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{N}$ には, 初期配置のユニットセル境界 $\partial\mathcal{Y}_0$ における反対称性

$$\mathbf{T}_m^{[k]} + \mathbf{T}_m^{[-k]} = \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{e}^{[k]} + \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{e}^{[-k]} = \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

が課せられる. ここで, 簡単のため $\mathbf{T}_m^{[\pm k]} := \mathbf{T}_m^{(\pm e^{[k]})}$ とおいた.

一方, マクロ領域の初期配置と現配置をそれぞれ $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$, 物質点の初期座標 $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ とその現在の位置を $\mathbf{x} = \tilde{\varphi}(\mathbf{X}) \in \mathcal{B}$ とすれば, マクロ変形勾配を $\mathbf{F}_M = \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{1}$ と定義できるが, これは次式に示すように対応するミクロ変形勾配のユニットセル体積平均に等しい.

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \mathbf{F}_m dY = \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{1} \quad (\text{A.7})$$

ここで, $|\mathcal{Y}|$ は初期配置 \mathcal{Y}_0 におけるユニットセルの体積を示す. また, 同様にマクロ第1PK 応力 \mathbf{P}_M も対応するミクロ応力 \mathbf{P}_m のユニットセル体積平均であり, 反対称条件 (A.6) より,

$$\mathbf{P}_M = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_0} \mathbf{P}_m dY = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\partial\mathcal{Y}_0} \mathbf{T}_m^{(N)} \otimes \mathbf{Y} ds \quad (\text{A.8})$$

で与えられる. したがって, ミクロスケールの基底ベクトル \mathbf{e} をマクロスケールにも転用すれば, 次式を導くことができる.

$$\mathbf{T}_M^{[k]} = \mathbf{P}_M \cdot \mathbf{e}^{[k]} = \frac{1}{|\partial\mathcal{Y}^{[k]}|} \int_{\partial\mathcal{Y}_0^{[k]}} \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{e}^{[k]} ds = \frac{1}{|\partial\mathcal{Y}^{[k]}|} \int_{\partial\mathcal{Y}_0^{[k]}} \mathbf{T}_m^{[k]} ds \quad (\text{A.9})$$

ここで, $|\partial\mathcal{Y}^{[k]}|$ は境界 $\partial\mathcal{Y}_0^{[k]}$ の面積を表す. マクロ境界値問題では以上の式に加えて, 次式の平衡方程式が与

えられる。

$$\nabla_X \cdot \mathbf{P}_M + \mathbf{B}_M = \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

ここで \mathbf{B}_M は物体力である。

以上をまとめると、所与のマクロ変形（例えば $\hat{\mathbf{H}}$ ）を入力データとして、擾乱変位場 \mathbf{u}^* に周期拘束条件を与えて平衡方程式 (A.3) を解く問題がミクロ境界値問題であり、このミクロ問題の解として得られるミクロ応力 \mathbf{P}_m のユニットセル平均をマクロ応力 \mathbf{P}_M とみなしてマクロ構造の平衡方程式 (A.10) を解くものがマクロ境界値問題である。最後に解くべきマクロおよびミクロのつり合い式を以下に記しておく。

$$\int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{F}_M : \mathbf{P}_M d\Omega - \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}_M d\Omega - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \delta \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{T}}_M d\Gamma = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\int_{\mathcal{Y}_0} \delta \mathbf{F}_m : \mathbf{P}_m dY = 0 \quad (\text{A.12})$$

ここで、 $\delta(\bullet)$ の表記は仮想場、 $(\hat{\bullet})$ は境界上で定義された所与の値であることを意味する。

3. ミクロ境界値問題における外部節点の導入

数値材料試験では、ユニットセルの有限要素モデルに対して理想的な境界条件（マクロ変位勾配 $\hat{\mathbf{H}}$ ）を与え、以上で述べた均質化法の過程に則ってマクロ応力を得ることを目的としている。この理想的な境界条件を与えるために、前節のミクロ境界値問題の境界条件を制御する「外部節点」を導入する。

まず、ユニットセルに与える変位拘束条件式 (A.5) を

$$\mathbf{w}^{[k]} - \mathbf{w}^{[-k]} = \mathbf{q}^{[k]} \quad (\text{A.13})$$

と書くことにする。ここで、 $\mathbf{q}^{[k]}$ は

$$\mathbf{q}^{[k]} = \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{L}^{[k]} \quad (\text{A.14})$$

とおいた。そして、初期配置におけるユニットセルの対面する境界面の組 $\partial \mathcal{Y}_0^{[k]}$ に対応して、Fig.12 に示すような3つの外部節点をユニットセル領域の外部に設ける。この外部節点は、対応する境界面 $\partial \mathcal{Y}_0^{[k]}$ に含まれるすべての節点の自由度拘束を関連付ける制御点である。すなわち、外部節点に与える変位は境界面（に含まれるすべての節点）に与える相対変位となる。この外部節点に対して自由度拘束 $\mathbf{q}^{[k]}$ を与えることで対面するユニットセルの境界面の組に含まれる節点に対して相対変位 $\mathbf{q}^{[k]}$ を与えることができる。境界面 $\partial \mathcal{Y}_0^{[k]}$ に対して与える i 方向の相対変位を $q_i^{[k]}$ と記述すると、外部節点に対して既知データ $q_i^{[k]}$ を与えた際に、その外部節点にかかる反力ベクトル $\mathbf{R}_i^{[k]}$ は境界面 $\partial \mathcal{Y}_0^{[k]}$ 上のミクロ表面力ベクトル $\mathbf{T}_{mi}^{[k]}$ の面積分となる。すなわち、外部節点にかかる反力ベクトルは

$$\mathbf{R}_i^{[k]} = \int_{\partial \mathcal{Y}_0^{[k]}} \mathbf{T}_{mi}^{[k]} ds \quad (\text{A.15})$$

と表される。この反力ベクトル $\mathbf{R}_i^{[k]}$ を初期配置のユニットセル境界面の表面積 $|\partial Y^{[k]}|$ で除した量がマクロ第1PK応力 $\mathbf{P}_{Mi}^{[k]}$ として算出される。

以上より、数値材料試験では、ユニットセルの有限要素モデルに設けられた $k=1,2,3$ の各外部節点に対して $i=1,2,3$ 方向に一定の条件で自由度拘束を与え、それぞれに対するマクロ応力を得ることができる。

4. 材料パラメータ同定

ミクロ構造の幾何学的特性をマクロ材料特性に反映させる役割を果たすのがマクロ材料構成則に存在する材料パラメータである。本節では、非均質なミクロ構造の材料特性を均質体であるマクロ構造の材料特性に置き換えるためのパラメータ同定について概説する。ここでは、以下に示す負荷パターンの数値材料試験により得られるマクロ応力-ひずみ関係を計測データとして利用し、マクロ構成則として採用する異方性超弾性構成則の材料パラメータを最適化アルゴリズムによって同定する。

4.1 数値材料試験の負荷パターン 本研究では、Fig.13 に示す6種類のマクロ変形パターンの数値材料試験を行う。以下に、それぞれの変形に対応する入力データ（マクロ変位勾配 $\hat{\mathbf{H}}$ ）を示す。

- 変形パターン1： y_1 軸引張

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

- 変形パターン2： y_2 軸引張

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

- 変形パターン3： y_3 軸引張

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

- 変形パターン4： $y_1 y_2$ 面せん断

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_{12} & 0 \\ \hat{H}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

- 変形パターン5： $y_1 y_3$ 面せん断

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{H}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{H}_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

- 変形パターン6： $y_2 y_3$ 面せん断

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H}_{23} \\ 0 & \hat{H}_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

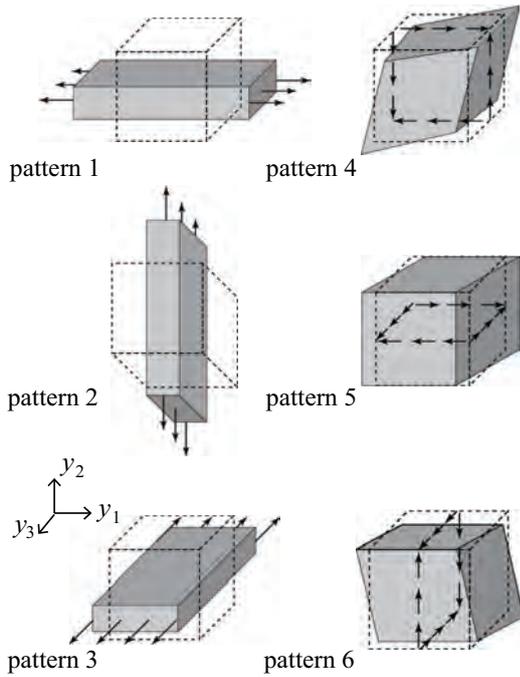


Fig. 13 Original and deformed homogenized bodies of unit cells

ここで、 \hat{H}_{ij} は数値材料試験で与えるマクロ変位勾配の制御する成分を示し、* はマクロ変位勾配の制御しない成分であり、解析を行って初めてその値が得られる。また、0 は解析を通して常にゼロに固定することを意味する。

4.2 同定方法 前述のとおり、本研究では最適化アルゴリズムの中でも計算速度や計算精度の面で高い性能を有するとされる差分進化法⁽³¹⁾ (Differential Evolution) を用いて異方性超弾性構成則の材料パラメータを同定した。なお、DE をパラメータ同定に適用するには適切な個体と評価関数を定義する必要がある。個体とは実行可能領域内に複数用意される最適化問題の解候補であり、全設計変数を成分として持つベクトルである。DE では個体が定められた規則に従って更新されていくことで最適解の探索が行われる。一方、評価関数とはそれぞれの個体の最適解としての適合度を示す関数でこの値によって個体間の優劣が決められ、最終的に最も優秀な個体が最適解として得られる。パラメータ同定では、個体を決定したいマクロ材料パラメータ数の次元を持つベクトルとして定義する。したがって、異方性超弾性構成則の同定すべきパラメータは、式(4)における D と式(16)における係数 $a_i \sim g_o$ および繊維方向を示す単位ベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} の各成分の計 36 個であることから、個体は最大 36 次元のベクトルとなる。また、本同定では数値材料試験から得られる応力ひずみデータと、マクロ構成則により得られる同定曲線を一致させる (カーブフィッティング) ようなマクロ材料パラメータを求めることを目標とし、その同定精

度を評価する評価関数値 ϕ を次式のように定義した。

$$\phi = \sum_{l=1}^6 \phi^{[l]} \quad (\text{A.22})$$

$$\phi^{[l]} = \frac{1}{n_{\text{step}}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{\text{step}}} (iS_{IJ}^{[l]} - i\hat{S}_{IJ}^{[l]})^2} \quad (\text{A.23})$$

ここで、 $i\hat{S}_{IJ}^{[l]}$ は変形パターン l の数値材料試験の荷重ステップ i において計測されるマクロ第 2PK 応力の IJ 成分を示しており、 $iS_{IJ}^{[l]}$ はその数値材料試験と同じひずみ量をマクロ構成則に与えることにより得られるマクロ第 2PK 応力である。また、 n_{step} は全荷重ステップ数である。DE では、この評価関数を最小化するように最適解の探索が行われ、これにより、数値材料試験と同等の応答結果を模擬できるマクロ材料パラメータが最適解として得られる。

参考文献

- (1) Brackett, D.J., Ashcroft, I.A. and Hague, R., Topology optimization for additive manufacturing, 22nd Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium, Texas, USA, pp. 348-362, 2011.
- (2) Gu, W., On Challenges and Solutions of Topology Optimization for Aerospace Structural Design, 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, May 19-24, Orlando, Florida, USA, 2013.
- (3) Kennedy, G, Large-scale multimaterial topology optimization for additive manufacturing, American Institute of Aeronautics and Astronautics, pp. 1-13, 2015.
- (4) Zegard, T., Paulino, G.H., Bridging topology optimization and additive manufacturing, *Struct. Multidisc. Optim.*, DOI 10.1007/s00158-015-1274-4, 2015.
- (5) Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Matsumoto, H., Chiba, A., Build direction dependence of microstructure and high-temperature tensile property of Co-Cr-Mo alloy fabricated by electron beam melting, *Acta Materialia*, 64, pp. 154-168, 2014, DOI:10.1016/j.actamat.2013.10.017
- (6) Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Chiba, A., Phase and grain size inhomogeneity and their influences on creep behavior of Co-Cr-Mo alloy additive manufactured by electron beam melting, *Acta Materialia*, 86, pp. 305-318, 2015, DOI:10.1016/j.actamat.2014.11.012
- (7) Sun, S.-H., Koizumi, Y., Kurosu, S., Li, Y.-P., Chiba, A., Effect of phase transformation on tensile behavior of Co-Cr-Mo alloy fabricated by electron-beam melting, *Funtai Oyobi Fummatu Yakin/Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, 61, 5, pp. 234-242, 2014.
- (8) Koizumi, Y., Sun, S.-H., Saito, T., Kurosu, S., Chiba, A., Prototyping of Co-Cr-Mo alloy flat spiral spring by electron beam melting, *Funtai Oyobi Fummatu Yakin/Journal*

- of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy, 61, 5, pp. 243-249, 2014.
- (9) Rodrigues, H., Guedes, J.M. Bendsoe, M.P., Hierarchical optimization of material and structure, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.24, pp. 1-10, 2002.
- (10) Niu, B., Yan, J. and Chen, G., Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 39, No. 2, pp. 115-132, 2009.
- (11) Smit, R.J.M., Brekelmans, W.A.M., Meijer, H.E.H., Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.155, pp.181-192, 1998.
- (12) Zheng, S.F., Ding, K., Denda, M., Weng, G.J., A dual homogenization and finite-element study on the in-plane local and global behavior of a nonlinear coated fiber composite, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.183, pp.141-155, 2000.
- (13) Feyel, F., Chaboche, J.-L., FE² multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol.183, pp.309-330, 2000.
- (14) Terada, K., Kikuchi, N., A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.190, pp.5427-5464, 2001.
- (15) Nakshatrala, P.B., Tortorelli, D.A., Nakshatrala, K.B., Nonlinear structural design using multi scale topology optimization, Part I: Static formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.261-262, pp.167-176, 2013.
- (16) Baaijens, F.P.T., Kouznetsova, V., Brekelmans, W.A.M., An approach to micromacro modeling of heterogeneous materials, *Comput. Mech.*, Vol.27, pp.37-48, 2001.
- (17) Simo, J.C., Taylor, R.L., Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 48, No. 1, pp. 101-118, 1985.
- (18) Kato, J., Terada, K. and Kyoya, T., Topology optimization of micro-structure for composites applying a decoupling multi-scale analysis, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 49, pp. 595-608, 2014.
- (19) 加藤準治, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 複合材料のマクロ構造挙動を考慮したミクロ構造トポロジー最適化, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 68, No. 2, pp. 279-287, 2012.
- (20) 谷地大舜, 加藤準治, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史, マルチスケールトポロジー最適化手法と解析的感度導出法の提案, 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCEs), Vol. 2013, Paper No.20130022, 2013.
- (21) 加藤準治, 谷地大舜, 西澤峻祐, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 分離型マルチスケール解析法による超弾性複合材料のミクロ構造トポロジー最適化, *Transactions of JSCEs*, 2015, submitted.
- (22) Terada, K., Kato, J., Hirayama, N., Inugai, T. and Yamamoto, K., A method of two-scale analysis with micro-macro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials, *Comput. Mech.*, Vol. 52, pp. 1199-1219, 2013.
- (23) 寺田賢二郎, 犬飼壮典, 濱名康彰, 見寄明男, 平山紀夫, 数値材料試験による異方性超弾性体のパラメータ同定, 日本計算工学会論文集 *Transactions of JSCEs*, Vol. 2008, Paper No. 20080024, 2008.
- (24) Watanabe, I. and Terada, K., A method of predicting macroscopic yield strength of polycrystalline metals subjected to plastic forming by micro-macro de-coupling scheme, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 52, No. 2, pp. 343-355, 2010.
- (25) Patnaik, S.N., Guptill, J.D. and Berke, L., Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 3087-3120, 1995.
- (26) Kaliske, M., A formulation of elasticity and viscoelasticity for fiber reinforced material at small and finite strains, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 185, pp. 225-243, 2000.
- (27) Kaliske, M., Schmidt, J., Nonlinear Anisotropic Elasticity at Finite Strains, *22nd CAD-FEM Users' Meeting 2004 International Congress on FEM Technology with ANSYS CFX & ICEM CFD Conference*, 2004.
- (28) Zhou, M., Rozvany, G.I.N., The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 89, pp. 309-336, 1991.
- (29) Kato, J., Lipka, A., Ramm, E., Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 39, pp. 63-81, 2009.
- (30) Belytschko, T., Liu, W.K., and Moran, B., *Nonlinear finite elements for continua and structures*, John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- (31) Storn, R. and Price, K., Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, *Journal of Global Optimization*, Vol. 11, pp.341-359, 1997.
- (32) Bendsoe, M.P., Sigmund, O., "Topology optimization, theory, method and applications", *Springer-Verlag*, 2002.
- (33) Sigmund, O., Pettersson, J., Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing

with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 16, 1, pp. 68–75, 1998.

- (34) T. Buhl, C.B.W. Pedersen and O. Sigmund: Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.19, pp. 93–104, 2000.
- (35) 松井和己, 寺田賢二郎, 西脇眞二, 石橋慶輝, 有限変形を伴う構造物に対する consistent トポロジー最適化手法, 日本計算工学会論文集 *Transactions of JSCES*, Vol. 2001, Paper No. 20010046, 2001.
- (36) Amir, O., A topology optimization procedure for reinforced concrete structures, *Comput. & Struct.*, Vol. 114–115, pp. 46–58, 2013.
- (37) 加藤準治, 干場大也, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 弾塑性複合材料のトポロジー最適化における解析的感度の精度検証, 日本計算工学会論文集 *Transactions of JSCES*, Vol. 2014, Paper No. 20140012, 2014.
- (38) Kato, J., Hoshiaba, H., Takase, S., Terada, K., Kyoya, T., Analytical sensitivity in topology optimization for elastoplastic composites, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 52, pp. 507–526, 2015.
- (39) Wang, F., Lazarov, B.S., Sigmund, O. and Jensen, J.S., Interpolation scheme for fictitious domain techniques and topology optimization of finite strain elastic problems, *Comput. Methods Appl.*, Vol. 276, pp. 453–472, 2014.
- (40) Dijk, van N.P., Langelaar, M., and van Keulen, F., Element deformation scaling for robust geometrically nonlinear analyses in topology optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 50, pp.537–560, 2014.
- (41) R. Kemmler, A. Lipka, E. Ramm: Large deformations and stability in topology optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.30, pp. 459–476, 2005.