参考資料：有限差分法の概要

松原　成志朗

ばね定数 k のばね，および，質量 m の質点からなる 1 自由度系の運動方程式は，

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \tag{1}$$

と表される．ここに，u は質点の変位，f は外力，$\dot{\bullet}$ は $\bullet$ の時間微分である．両辺を m で割り，固有振動数 ω および減衰定数 ξ を用いると，

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = a \tag{2}$$

となる．ここに，$a = f/m$ は系に作用する加速度である．運動方程式 (2) を有限差分法により離散化し，表計算ソフトウェア等を用いて，時刻歴応答を解析する．

差分表現

微分の定義は，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

である．これに対して，差分とは Δt を小さいが有限な大きさにとどめることにより，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \tag{4}$$

のように微分の近似値を定義するものである（ただし，差分の定義は他に無数に存在する）．Taylor 展開を用いると，

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}t^3}(\Delta t)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}t^4}(\Delta t)^4 + O\left((\Delta t)^5\right) \tag{5}$$

となる．したがって，u の t に対する 1 階導関数は，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{6}$$

と表現でき，式 (4) は Δt に関して 1 次のオーダーの精度を有していることがわかる．少し工夫する（式 (5) から式 (8) を辺々差し引く）と，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2\Delta t} + O\left((\Delta t)^2\right) \tag{7}$$

のように，中央差分と呼ばれる 2 次精度を有する差分が導ける．

同様に，u の t に対する 2 階導関数に相当する差分表現を導出する．Taylor 展開を用いると，

$$u(t-\Delta t) = u(t) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}(\Delta t)^2 - \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}t^3}(\Delta t)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}t^4}(\Delta t)^4 + O\left((\Delta t)^5\right) \tag{8}$$

となり，式 (5) と式 (8) の辺々を加えると，

$$u(t+\Delta t) + u(t-\Delta t) = 2u(t) + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}(\Delta t)^2 + O\left((\Delta t)^4\right) \tag{9}$$

を得る．式 (9) より，

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{u(t+\Delta t) - 2u(t) + u(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} + O\left((\Delta t)^2\right) \tag{10}$$

と表現され，u の t に対する 2 階導関数の差分が導出される．このとき，Δt に関して 2 次のオーダーの精度を有していることに注意する．

表記を簡単にするために，$u(t) = u_i$，$u(t+\Delta t) = u_{i+1}$，$u(t-\Delta t) = u_{i-1}$ とおく．式 (7)，(10) を運動方程式 (2) に代入し，両辺に $(\Delta t)^2$ を掛けると，

$$(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \xi\omega\,(u_{i+1} - u_{i-1})\,\Delta t + \omega^2 u_i(\Delta t)^2 = a_i(\Delta t)^2 \tag{11}$$

が得られる．式 (11) では，u_i と u_{i-1} が既知であれば，u_{i+1} について逐次解くことができ，このような解法を陽解法と呼ぶ．陽解法は簡便であるが，計算を安定に進めるためには，時刻刻み Δt がある程度小さくなくてはならない．

振動台実験との比較についての補足

制止した座標系における質点の変位を u，地盤（振動台）の変位を u_{g} とする．このとき，地盤からみた質点の変位（相対変位）は，$u_{\mathrm{r}} = u - u_{\mathrm{g}}$ である．

質点の運動方程式は，質点の変位 u および相対変位 u_{r} を用いて，

$$m\ddot{u} + c\dot{u}_{\mathrm{r}} + ku_{\mathrm{r}} = 0 \tag{12}$$

と表せる．ここで，質点の変位は $u = u_{\mathrm{r}} + u_{\mathrm{g}}$ であるので，運動方程式 (12) に代入すると，

$$m\left(\ddot{u}_{\mathrm{r}} + \ddot{u}_{\mathrm{g}}\right) + c\dot{u}_{\mathrm{r}} + ku_{\mathrm{r}} = 0 \tag{13}$$

となり，地盤の加速度の項を移項すると，

$$m\ddot{u}_{\mathrm{r}} + c\dot{u}_{\mathrm{r}} + ku_{\mathrm{r}} = -m\ddot{u}_{\mathrm{g}} \tag{14}$$

と表現され，地盤の加速度を外力とする運動方程式とみなせる．

実験で計測される加速度は，質点の変位に対する加速度であるので，解析で求めた u_{r} から，2 階導関数の差分表現を用いて加速度 $\ddot{u}_{\mathrm{r}}$ を求め，相対加速度 $\ddot{u}_{\mathrm{r}}$ に地盤の加速度 $\ddot{u}_{\mathrm{g}}$ を加えた加速度 $\ddot{u} = \ddot{u}_{\mathrm{r}} + \ddot{u}_{\mathrm{g}}$ と比較しなくてはならないことに注意しよう．

式 (11) から，u_{i+1} を求めるために，陽な形に整理すると，

$$u_{i+1} + \xi\omega u_{i+1}\Delta t = a_i(\Delta t)^2 + 2u_i - u_{i-1} + \xi\omega u_{i-1}\Delta t - \omega^2 u_i(\Delta t)^2 \tag{15}$$

$$(1 + \xi\omega\Delta t)u_{i+1} = -\ddot{u}_{\mathrm{g}}(\Delta t)^2 + 2u_i - u_{i-1} + \xi\omega u_{i-1}\Delta t - \omega^2 u_i(\Delta t)^2 \tag{16}$$

$$(1 + \xi\omega\Delta t)u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} + \left(-\omega^2 u_i - \ddot{u}_{\mathrm{g}}\right)(\Delta t)^2 + \xi\omega u_{i-1}\Delta t \tag{17}$$

$$u_{i+1} = \frac{2u_i - u_{i-1} + \left(-\omega^2 u_i - \ddot{u}_{\mathrm{g}}\right)(\Delta t)^2 + \xi\omega u_{i-1}\Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t} \tag{18}$$

となる．ここで，$a_i = -\ddot{u}_{\mathrm{g}}$ とした．

式 (18) で得られる変位 u_i は相対変位 u_{r} を意味するため，2 階導関数の差分表現式 (10) を用いて算出した $\ddot{u}_{\mathrm{r}}$ に地盤の加速度 $\ddot{u}_{\mathrm{g}}$ を加えたものが絶対加速度（応答加速度）となる．